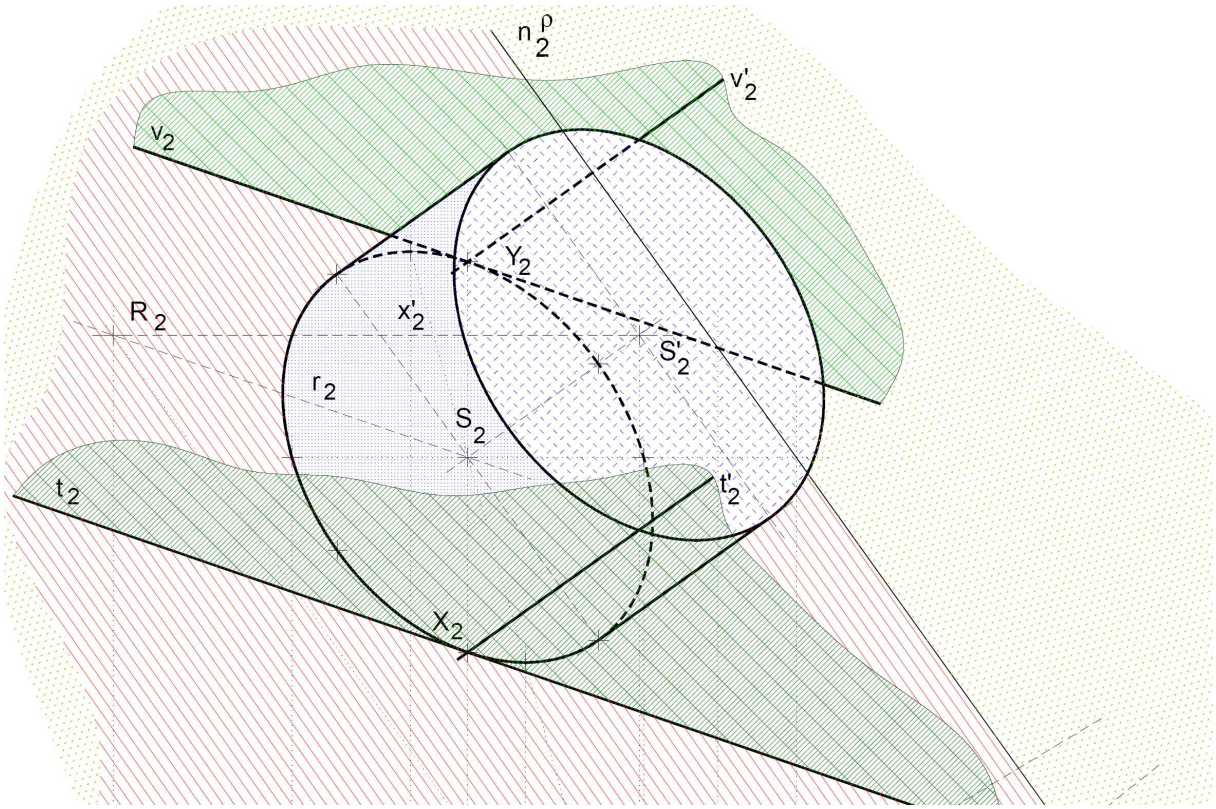
ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Z

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE



ONDŘEJ MACHŮ a kol.

Předmluva

Otevíráte sbírku, která vznikla z příkladů zadaných studentům pátého ročníku PřF UP v Olomouci, učitelů matematiky a deskriptivní geometrie, v rámci semináře z deskriptivní geometrie. Příklady jsou řazeny náhodně, bez vzájemné souvislosti, protože se jedná víceméně o komplexní příklady, není toho ani třeba. Pro jejich rozlišení je v obsahu vždy připojen v závorce komentář, co se v daném příkladě řeší.

Každý příklad je zadán souřadnicemi, řešen co nejvíce obecně, tj. nezávisle na zvolené promítací metodě, a poté narýsován jako samostatný rys. U každého rysu je uveden jeho autor. Téměř všechny jsou zhotoveny v Mongeově projekci, až na pár vyjímek, které jsou uvedeny v obsahu. Rysy a obrázky jsou vytvořeny v programu DesignCAD.

Ondřej Machů, Olomouc 2007

Poděkování patří magistře Marii Škodové, které výše zmíněný seminář vedla a tyto příklady nám zadala.

© Ondřej Machů, Kristýna Prusenovská, Andrea Lukáčková

OBSAH:

PŘÍKLAD 1 4
(konstrukce krychle)
PŘÍKLAD 2 6
(konstrukce pravidelného osmistěnu)
PŘÍKLAD 3 8
(konstrukce rotační kuželové plochy)
PŘÍKLAD 4 10
(konstrukce pravidelného osmistěnu)
PŘÍKLAD 5 12
(konstrukce ronostranného trojúhelníku)
PŘÍKLAD 6 14
(konstrukce rotační kuželové plochy)
PŘÍKLAD 7 16
(konstrukce pravidelného šestibokého jehlanu)
PŘÍKLAD 8 18
(konstrukce a technické osvětlení rotačního válce)
PŘÍKLAD 9 20
(konstrukce rovnoběžníkového řezu jehlanu)
PŘÍKLAD 10 22
(konstrukce rovnostranného trojúhelníku)
PŘÍKLAD 11 24
(konstrukce a průsek rotačního anuloidu rovinou)
PŘÍKLAD 12 26
(konstrukce a průsek rotačního anuloidu rovinou)
PŘÍKLAD 13 28
(konstrukce plochy kulové)
PŘÍKLAD 14 30
(konstrukce plochy kulové - *kótované promítání*)
PŘÍKLAD 15 32
(konstrukce tečné roviny dvou kulových ploch)
PŘÍKLAD 16 34
(konstrukce dotykové rotační válcové plochy k ploše kulové)
PŘÍKLAD 17 36
(konstrukce rovnostranného kužele vepsaného do plochy kulové)
PŘÍKLAD 18 38
(konstrukce kruhové válcové plochy)
PŘÍKLAD 19 40
(konstrukce tečných rovin rotačního válce)
PŘÍKLAD 20 42
(konstrukce rotačního elipsoidu)
PŘÍKLAD 21 44
(řez rotačního elipsoidu rovinou)
PŘÍKLAD 22 46
(konstrukce rotačního paraboloidu)
PŘÍKLAD 23 48
(konstrukce rotačního dvojdílného hyperboloidu)
PŘÍKLAD 24 50
(zobrazení přímkové rotační plochy)
PŘÍKLAD 25 52
(konstrukce rotační válcové plochy)

PŘÍKLAD 26 54
(konstrukce parabolického řezu rotačního jednodílného hyperboloidu)
PŘÍKLAD 27 56
(parabolický řez kužele - *axonometrie*)
PŘÍKLAD 28 58
(konstrukce příčky mimoběžek daným bodem – *středové promítání*)
PŘÍKLAD 29 60
(průnik kosého kruhového kužele s kosým kruhovým válcem)

PŘÍKLAD 1

Zobrazte krychli jejíž jedna hrana $a = 4{,}5$ leží na $b = QR$, $Q[1{,}2\,;\,2{,}2\,;\,0]$, $R[5\,;\,6{,}2\,;\,2{,}3]$ a hrana s ní mimoběžná leží v rovině $\rho(3, \infty, 10)$.

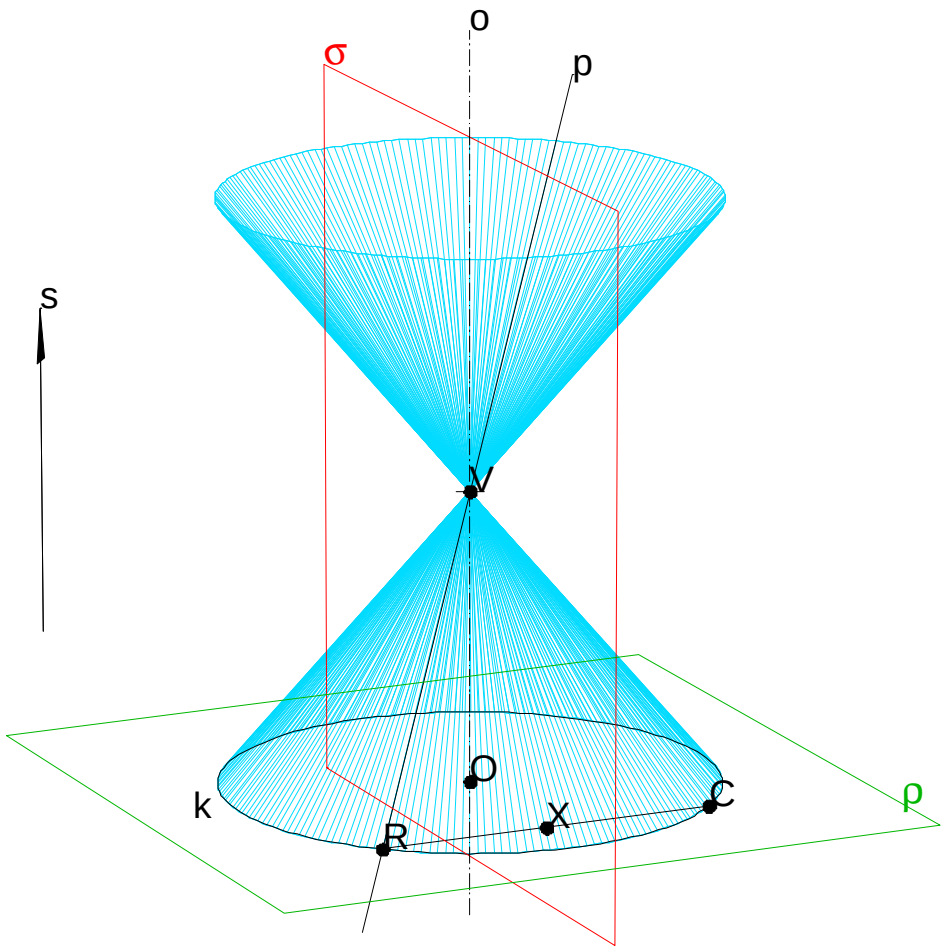
PŘÍKLAD 2

Zobrazte pravidelný osmistěn s úhlopříčkou AC, $A[2;1;1]$, $C[-2;9;7]$, je-li jedna jeho hrana vycházející z bodu A rovnoběžná s půdorysnou.

PŘÍKLAD 3

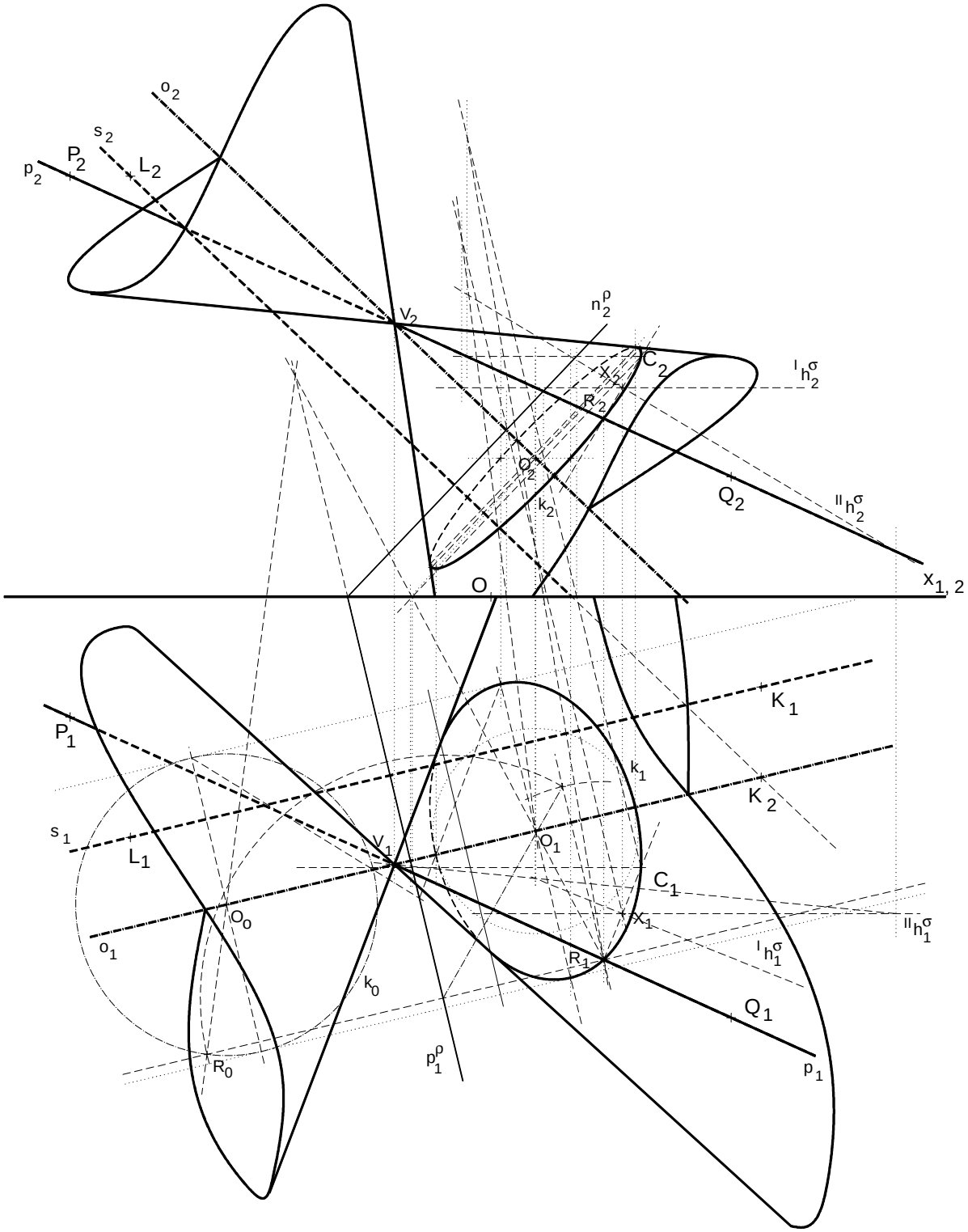
Sestrojte rotační kuželovou plochu určenou směrem osy $s = KL$, povrchovou přímkou $p = PQ$ a bodem plochy C. $K[4{,}5\,;\,1{,}5\,;\,-3]$, $L[-6\,;\,4\,;\,7]$, $P[-7\,;\,2\,;\,7]$, $Q[4\,;\,7\,;\,2]$, $C[2{,}5\,;\,4{,}5\,;\,4]$.

1. $\rho:\ C \in \rho \wedge \rho \perp s$
2. $R:\ R = \rho \cap p$
3. $\sigma:\ \forall X \in \sigma : |RX| = |CX|$
4. $V:\ V = \sigma \cap p$
5. $O:\ O = o \cap \rho,\ o \| s$
6. $k:\ k(O, r = |OR|)$



RYS č.3

KUŽELOVÁ PLOCHA



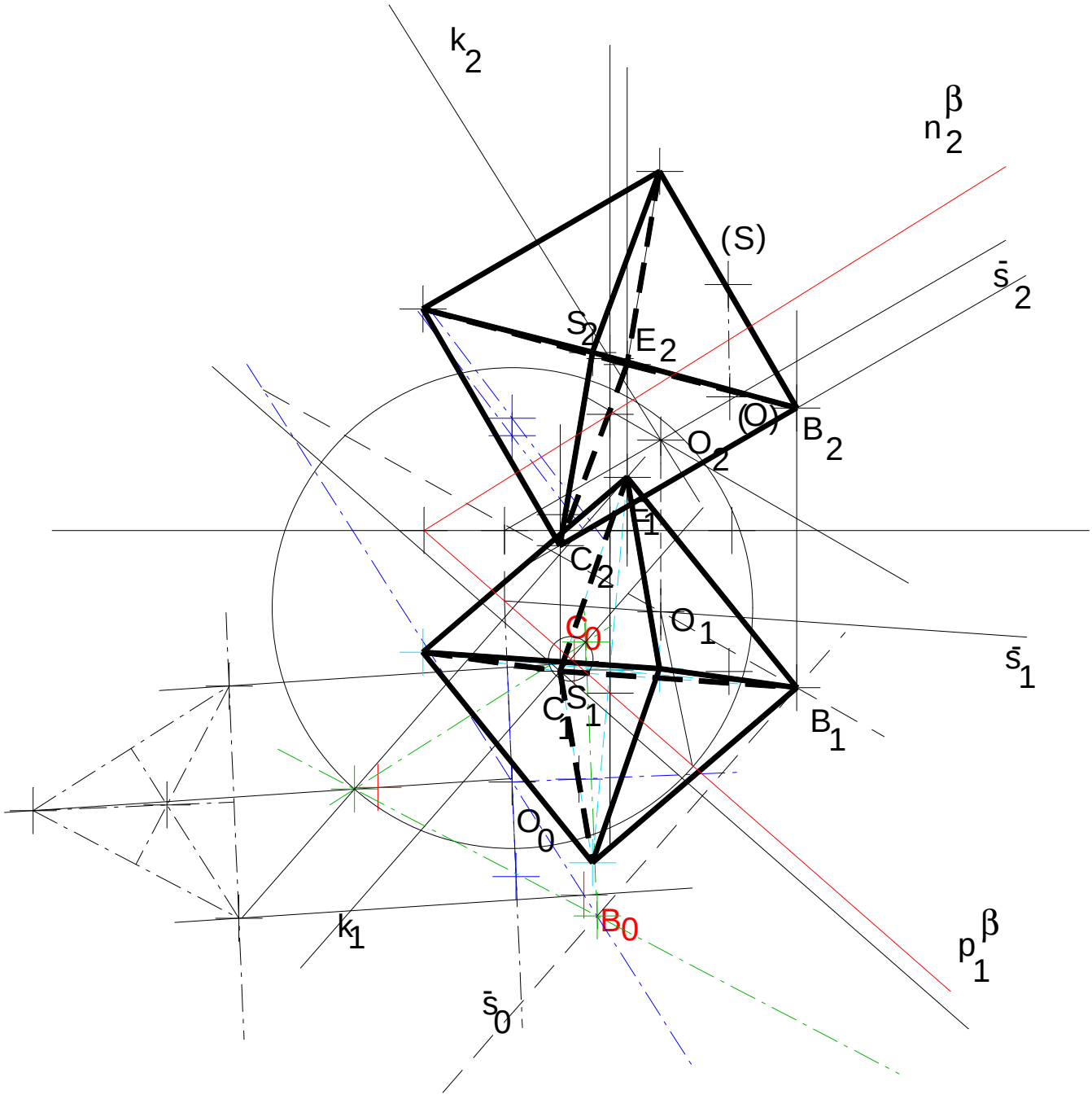
ONDŘEJ MACHŮ

PŘÍKLAD 4

Zobrazte pravidelný osmistěn o středu $S[0;6;7]$ se stěnou v $\rho(-8;7;5)$, jestliže jedna jeho hrana svírá s průmětnou π úhel α, $|\sphericalangle\alpha|=30°$. $|\sphericalangle\alpha|=30^{\circ}$

R Y S č.4

PRAVIDELNÝ OSMISTĚN



ANDREA LUKÁČKOVÁ

PŘÍKLAD 5

Nad stranou AB, $A[-1;3;8]$, $B[-4;9;3]$, sestrojte rovnostranný trojúhelník tak, aby jeho vrchol C měl od bodů M a L, $M[1;2;8\frac{1}{2}]$, $L[5;6;0]$, stejné vzdálenosti.

PŘÍKLAD 6

Zobrazte rotační kuželovou plochu na níž leží povrchová přímka $a=AB$, $A[5;-2;6]$, $B[-1;10{,}5;1]$, která prochází bodem $D[1;1;7{,}5]$, a která se dotýká roviny $\gamma(4{,}5;5{,}5;-6{,}5)$.

1. $V:\ V=a\cap\gamma$

   Každá tečná rovina obsahuje vrchol rotační kuželové plochy a každá povrchová přímka vrcholem prochází.

2. $C:\ C\in a\wedge|VC|=|VD|$

   Hledáme řídicí kružnici procházející bodem D. Řídicí kružnice je množina všech bodů plochy, které mají stejně velkou vzdálenost od vrcholu.

3. $R:\ R=CD\cap\gamma$

   Bod R je bodem průsečnice roviny γ a roviny řídicí kružnice.

4. $k:\ k(V,r=|VD|)\wedge k\subset\gamma$

   V rovině γ hledáme bod, pro který platí, že jeho vzdálenost od vrcholu je rovna velikosti úsečky VD.

5. $t:\ t\ldots$ tečna kružnice k vedená z bodu R s bodem dotyku E

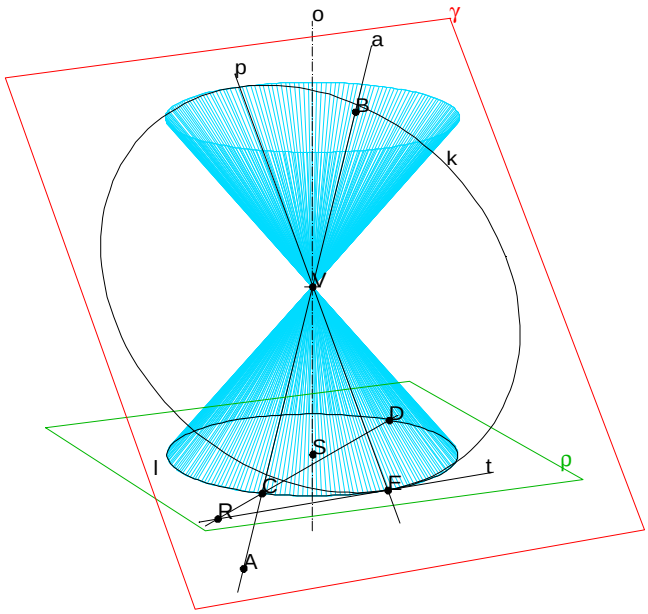
   Průsečnice roviny γ a roviny řídicí kružnice je jednak tečnou řídicí kružnice, ale i tečnou kružnice k.

6. $\rho:\ \rho=(CDE)$

   Nyní již můžeme sestrojit rovinu, ve které bude ležet řídicí kružnice l.

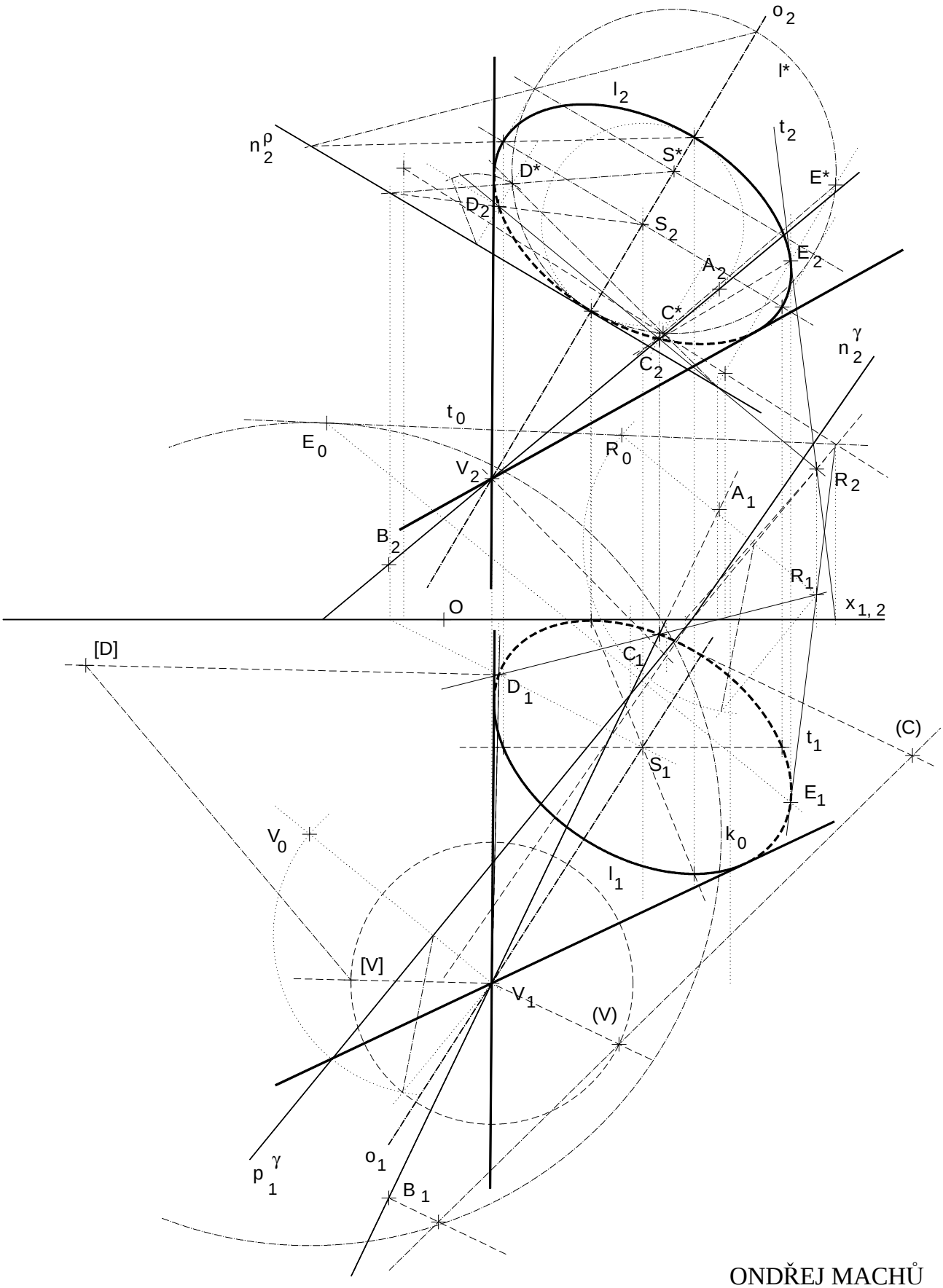
7. $l:\ l\ldots$ kružnice opsaná ΔCDE (řídicí kružnice kuželové plochy)

   Kontrolou správnosti rýsování je, že $o=VS\perp\rho$, kde S je střed kružnice l.



R Y S č.6

ROTAČNÍ KUŽELOVÁ PLOCHA



ONDŘEJ MACHŮ

PŘÍKLAD 7

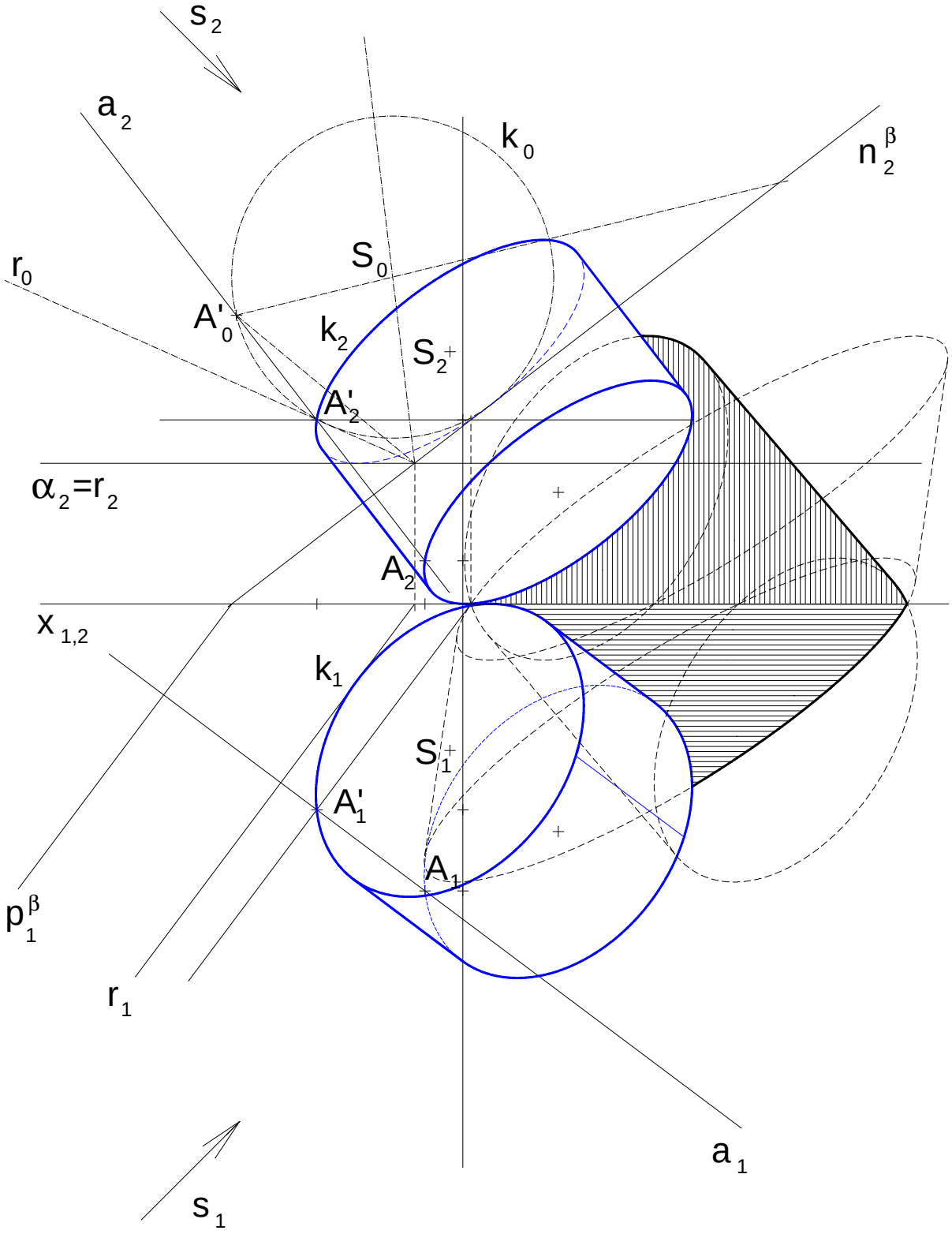
Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan o vrcholu $V[2;5;2]$ s podstavou v rovině souměrnosti o středu S a vrcholu $A[1;1;?]$.

P Ř Í K L A D 8

Zobrazte technické osvětlení rotačního válce určeného povrchovou přímkou $a = AA'$, $A[-0{,}7\,;5{,}3\,;0{,}8]$, $A'[-2{,}7\,;3{,}8\,;3{,}4]$, aby podstavou procházející bodem A se opíral o π a podstavou procházející bodem A' se opíral o ν.

R Y S č.8

TECHNICKÉ OSVĚTLENÍ ROTAČNÍHO VÁLCE



KRISTÝNA PRUSENOVSKÁ

PŘÍKLAD 9

Bodem M veďte rovinu tak, aby proťala jehlan o podstavě $ABCD$, $A[1;3;0]$, $B[-3;5;0]$, $C[-4;9;0]$, $D[3;11;0]$, a vrcholu $V[6;6;10]$ v rovnoběžníku.

P Ř Í K L A D 10

Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, $A[-1;6;2]$, $B[-1;1;3]$, jehož třetí vrchol leží v rovině $\rho(\infty,8,7)$.

PŘÍKLAD 11

Sestrojte průsek rotačního anuloidu s osou kolmou k π jdoucí bodem $P[-1{,}5;7;0]$, která se dotýká přímky $t=AT$, $A[-1{,}5;7;1{,}3]$, $T[-2{,}5;9{,}1;5]$, v bodě T, a která prochází bodem $B[-5{,}5;10{,}5;2{,}5]$, rovinou $\rho(2;1{,}5;-4)$.

1. $\mu:\ o\subset\mu$

   Zvolíme rovinu procházející osou o, v tomto příkladě je volena tak aby $\mu\|\nu$.

2. $B':$ *otočením B do μ kolem osy o*

3. $t':$ *otočením t do μ kolem osy o*

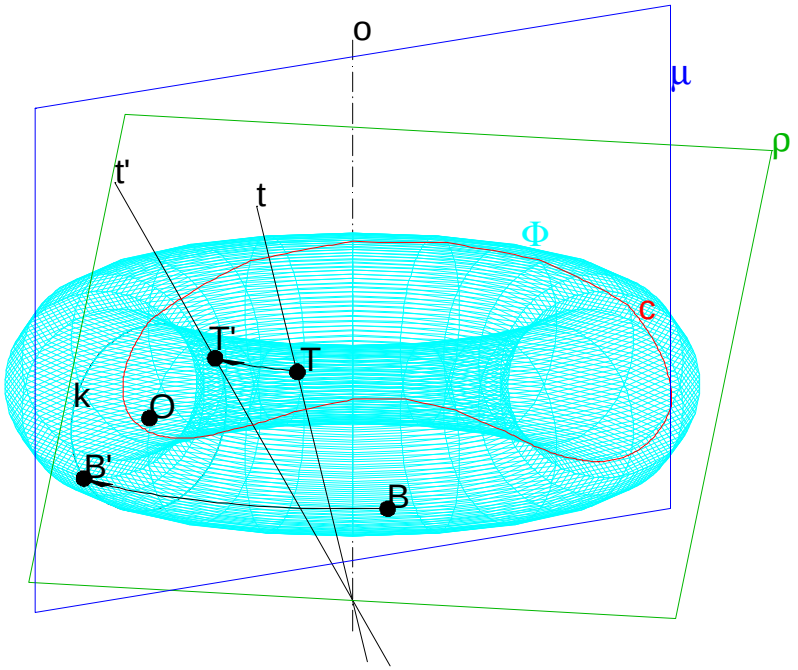
   V obecném případě mohou nastat dvě řešení. Nechť φ je polorovina určená (o,B'), pak pro bod T' vzniklý otočením bodu T platí: $T'\in\varphi\vee T'\notin\varphi$. Je ovšem zřejmé, že v druhém případě by nešlo o anuloid, nýbrž o melonoid a t by nebyla tečnou.

4. $k:\ k(O,r=|OB'|):\ t'$ *je tečna k v bodě* T'

   Řešíme planimetrickou úlohu. Máme sestrojit kružnici, která se dotýká přímky t' v bodě T', a procházející bodem B'.

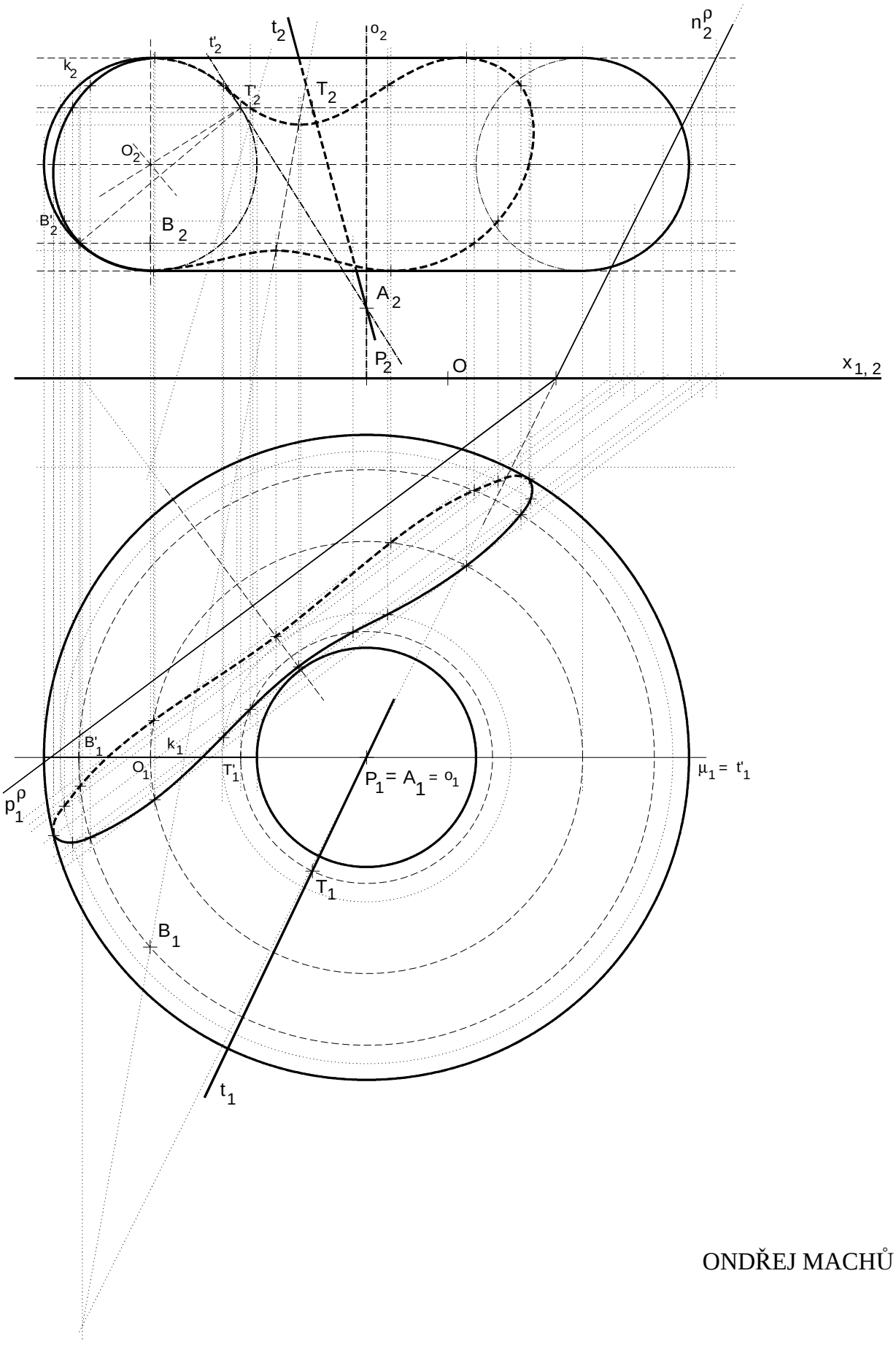
5. $c:\ c=\{X:\ X\in\rho\wedge X\in\Phi,\ \Phi\ldots$ *anuloid určený osou o a kružnicí* $k\}$

   Průsek anuloidu rovinou je množina bodů, které leží v rovině a zároveň patří anuloidu. Obecně se jedná o křivku čtvrtého stupně. Konstukce se provádí bodově. Vedeme roviny kolmé k ose anuloidu, jejichž průseky jsou kružnice. Tyto roviny zároveň protínají rovinu ρ v přímkách. Průsečíky těchto přímek s kružnicemi jsou již body průseku.



R Y S č.11

PRŮSEK ANULOIDU ROVINOU



ONDŘEJ MACHŮ

P Ř Í K L A D 12

K rotačnímu anuloidu se středem $O[0;6{,}5;?]$ s osou kolmou k π, jehož tvořící kružnice má střed $S[-3{,}5;6{,}5;3]$ a poloměr $r=2{,}5$, veďte v jeho bodě $A[2;5;?]$ tečnu, aby protínala přímku $m=MN$, $M[-3{,}5;0;7]$, $N[2;2;7]$, a protněte jej rovinou $\rho(m,t)$.

PŘÍKLAD 13

Sestrojte plochu kulovou, která prochází bodem $A[1;3;2]$, dotýká se přímky q určené body MN, $M[-6;4;3]$, $N[1;0;9]$ a přímky $t=QR$, $Q[-3;9;9]$, $R[1;7;5]$, v bodě R.

P Ř Í K L A D 14

Zobrazte plochu kulovou, která se dotýká koule o středu $S[2{,}5;3;2{,}5]$ a poloměru $r=2{,}5$ v bodě $T[-1{,}5;4{,}5;z>2{,}5]$ a roviny ρ určené spádovou přímkou $s=PQ$, $P[1;9;0]$, $Q[4{,}5;9;7]$. Řešte v kótovaném promítání.

P Ř Í K L A D 15

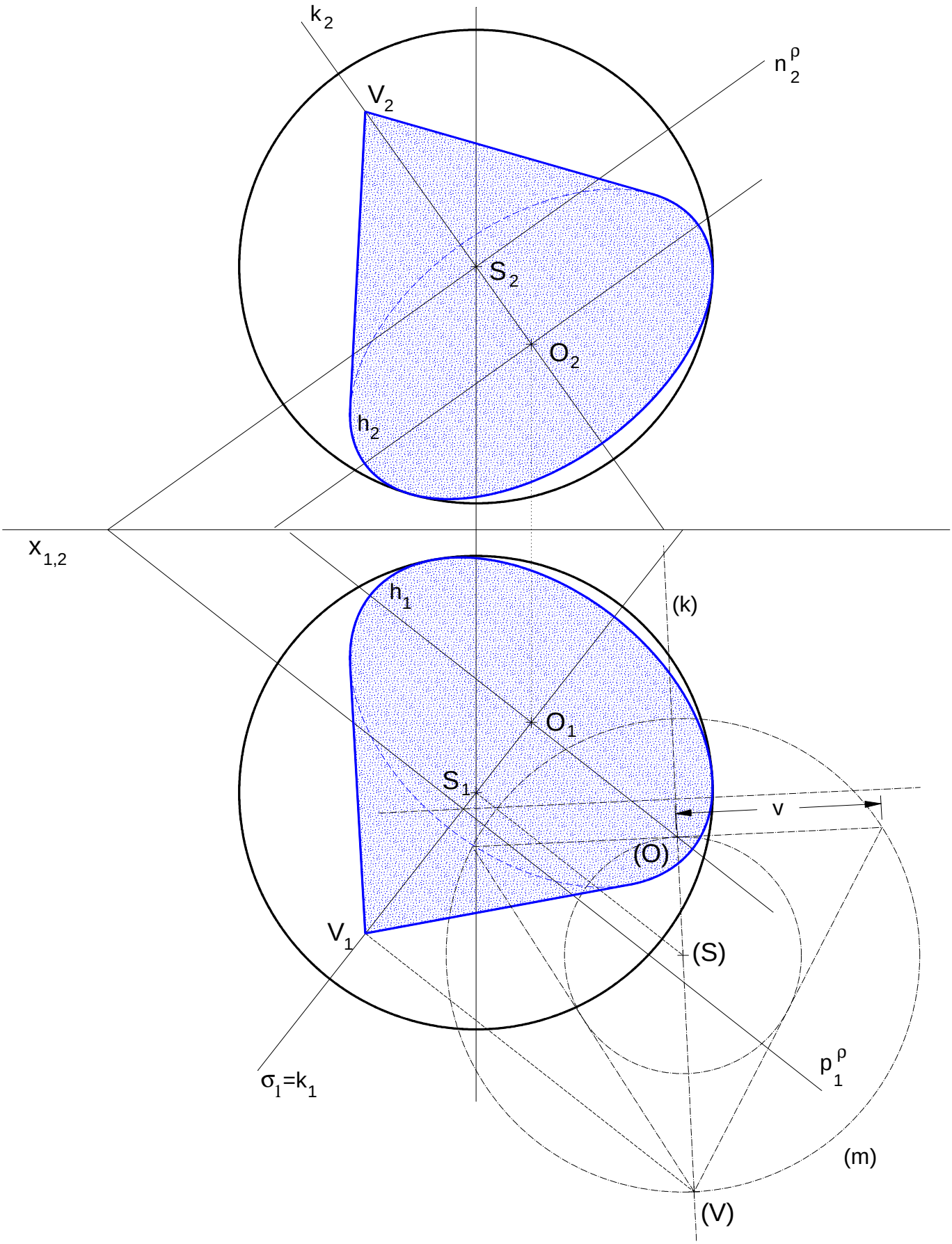
Bodem M veďte společnou tečnou rovinu k plochám kulovým κ^1 o středu $S^1[-3{,}5{,}3]$ a poloměru $r^1=2$ a κ^2 o středu $S^2[2{,}4{,}4]$ a poloměru $r^2=4$.

P Ř Í K L A D 16

K ploše kulové o středu $S[0;5;4]$ a poloměru $r=3{,}5$ sestrojte rotační dotykovou plochu válcovou s osou rovnoběžnou s přímkou $s=MN$, $M[-4;7;0]$, $N[3;0;6]$.

P Ř Í K L A D 17

Do kulové plochy o středu $S[0;5;5]$ a poloměru $r=4{,}5$ vepište rovnostranný kužel tak, aby jeho podstava byla rovnoběžná s rovinou $\rho(-7{,}5\frac{1}{2},5)$.



PRUSENOVSKÁ KRISTÝNA, 1.12.2006

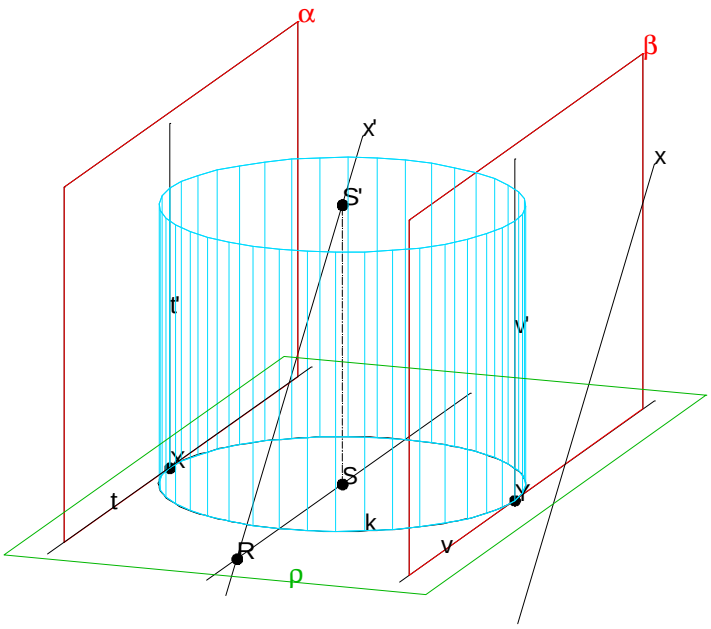
P Ř Í K L A D 18

Sestrojte kruhovou plochu válcovou, která se dotýká roviny $\rho(-5\frac{1}{2},10,8)$ a roviny π a obsahuje dva body kruhového řezu $A[0;4;3]$, $B[3;1;1{,}5]$.

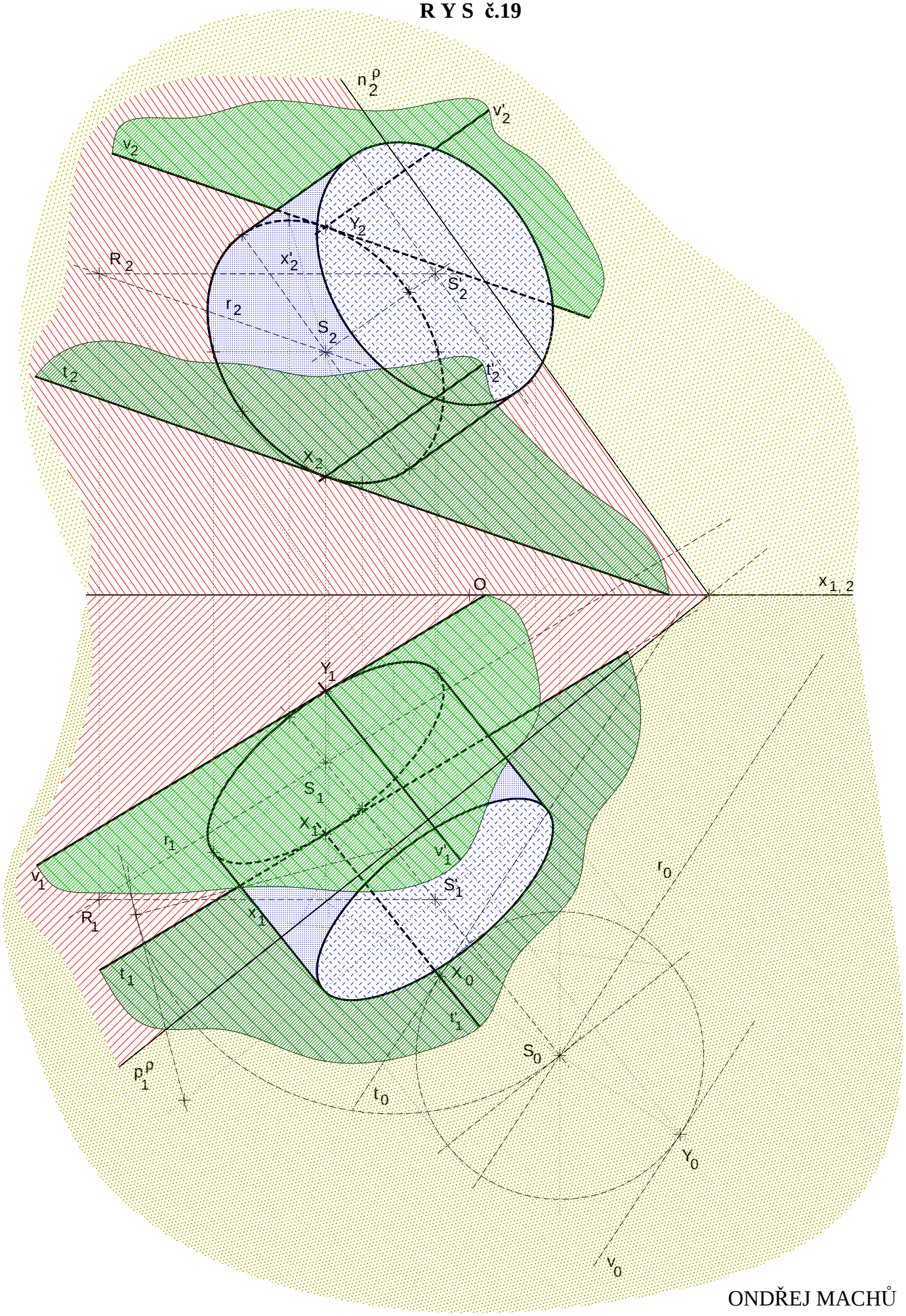
P Ř Í K L A D 19

K rotačnímu válci s podstavou v rovině $\rho(5,4,7)$ o středu $S[-3;3,5;?]$ a poloměru $r=3$ a výšce $v=4$ veďte tečné roviny rovnoběžné s osou x.

1. *Konstrukce válce, kdy SS' je jeho osou.*
2. x': $x' \| x \wedge S' \in x'$
3. R: $R = x' \cap \rho$
4. t, v: *tečny kružnice* $k=(S, r=3)$ *s body dotyku* $X, Y \wedge t \| v \| r = RS$
5. t', v': *dotykové přímky tečných rovin*
6. $\alpha=(t,t')$, $\beta=(v,v')$ ... *tečné roviny válce*



R Y S č.19



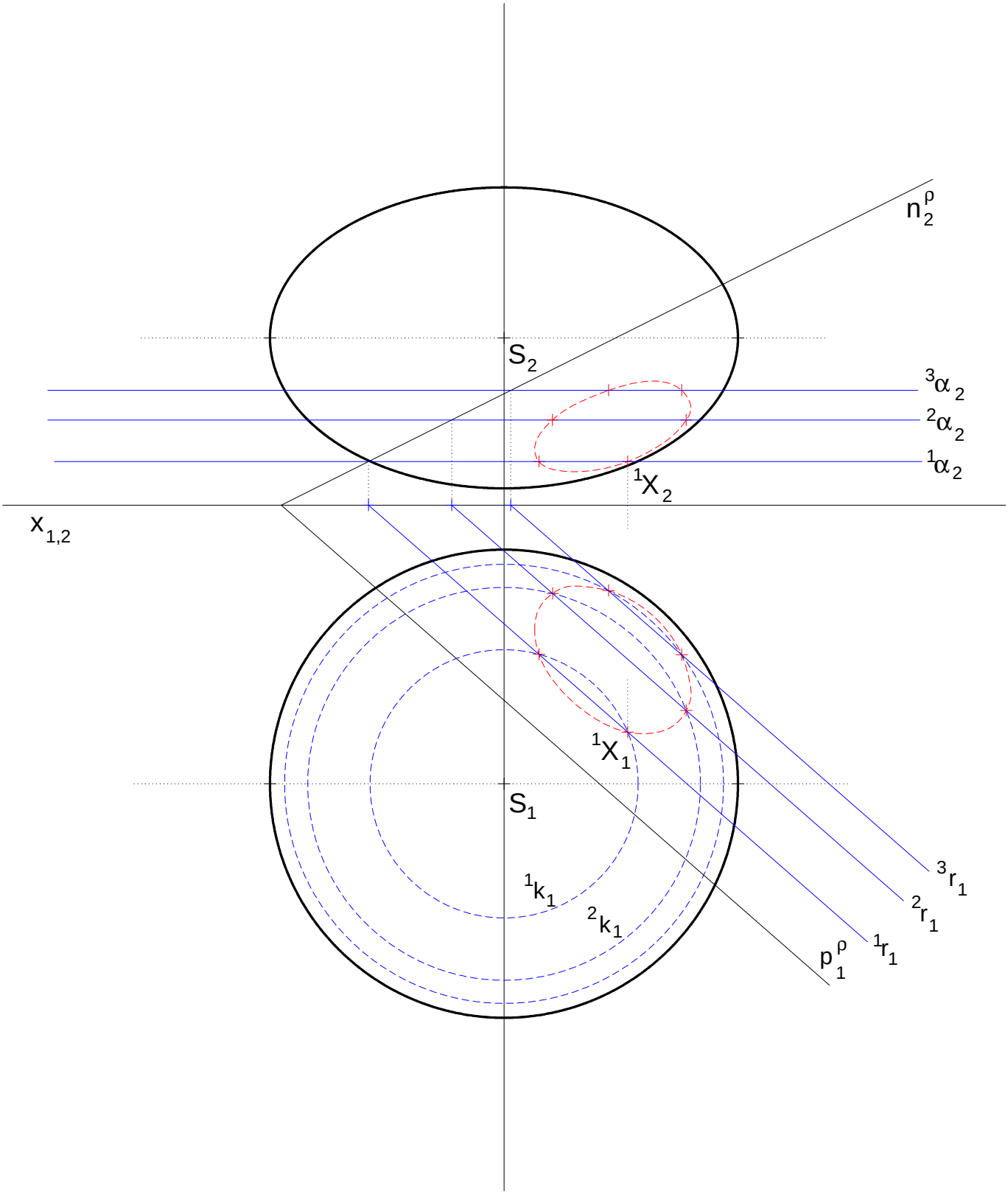
ONDŘEJ MACHŮ

P Ř Í K L A D 20

Sestrojte rotační elipsoid protáhlý s osou kolmou k π o středu $S[0;4;5{,}5]$, který prochází body $A[1{,}7;5{,}2;2]$, $B[-0{,}8;0{,}8;4]$.

P Ř Í K L A D 21

Stanovte průsek rotačního elipsoidu zploštělého s osou kolmou k π o středu $S[0;5;3]$ a poloosách $a=4{,}2$, $b=2{,}7$ s rovinou $\rho(-4{,}3\frac{1}{2},2)$.



PRUSENOVSKÁ KRISTÝNA, 1.12.2006

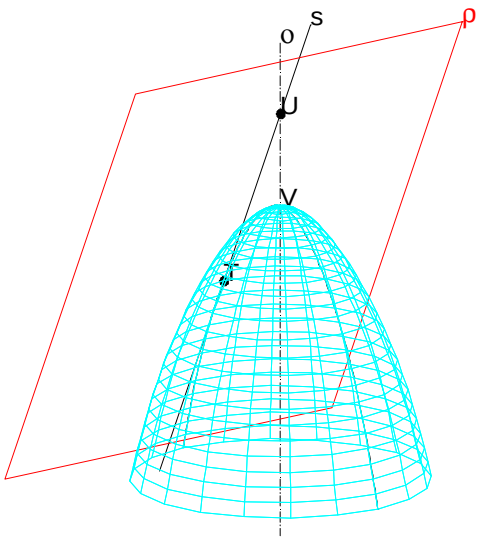
PŘÍKLAD 22

Sestrojte rotační paraboloid s osou kolmou k π o vrcholu $V[0;6;8]$, který se dotýká roviny $\rho(LMN)$, $L[7;3\frac{1}{2};1]$, $M[0;5;9]$, $N[5;1;1]$.

1. *s^ρ: s^ρ ... spádová přímka roviny ρ, taková že: $U = s^\rho \cap o$*

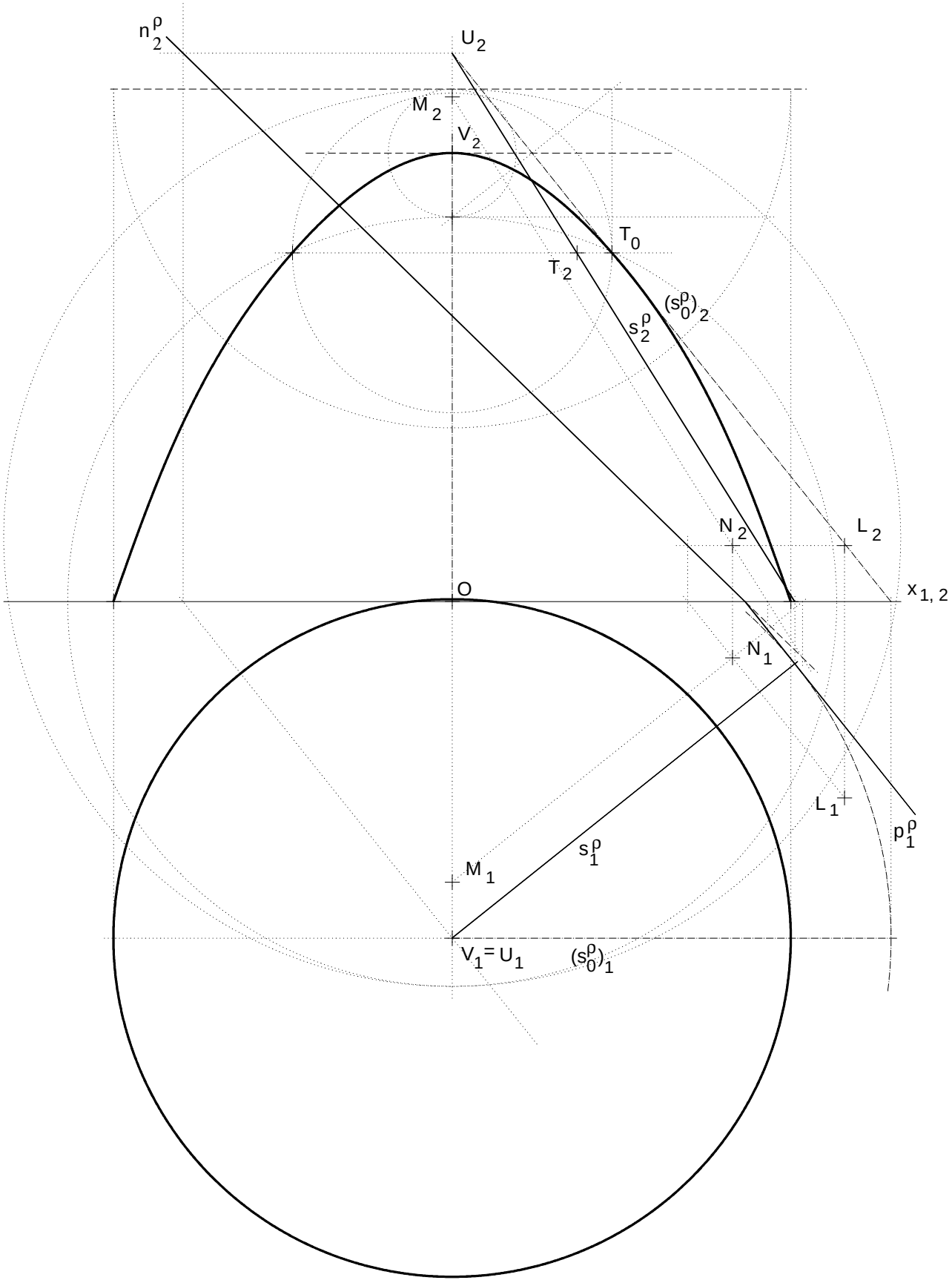
2. *rovina určená s^ρ a osou paraboloidu o protíná plochu v parabole, jejíž vrchol je V, osa o a dotýká se přímky s^ρ v bodě T*

Tuto konstrukci řešíme např. otočením roviny ρ do polohy kolmé k nárysně, kdy se stane nárysně promítací rovinou.
Konstrukci paraboly pak provádíme na základě její definice.



R Y S č.22

PARABOLOID



ONDŘEJ MACHŮ

PŘÍKLAD 23

Sestrojte rotační dvojdílný hyperboloid s osou kolmou k π, který má ohnisko v bodě $F[0;6;2]$ a dotýká se rovin $\rho(M,N,P)$ a $\sigma(Q,R,U)$, $M[-4;0;0]$, $N[-2;6;3]$, $P[-6;2;0]$, $Q[6;2;2]$, $R[2;5;4]$, $U[0;2;4]$.

PŘÍKLAD 24

Zobrazte rotační plochu, která vznikne rotací přímky $m = MN$, $M[-3;6;0]$, $N[3;6;8]$, okolo osy kolmé k π procházející bodem $P[0;4;0]$.

P Ř Í K L A D 25

Sestrojte rotační válcovou plochu s osou v rovině $\rho(2;-2{,}6;1{,}4)$, která prochází bodem $A[-2{,}7;1{,}7;0{,}6]$ a dotýká se roviny $\beta(5{,}5;8{,}2;11)$.

P Ř Í K L A D 26

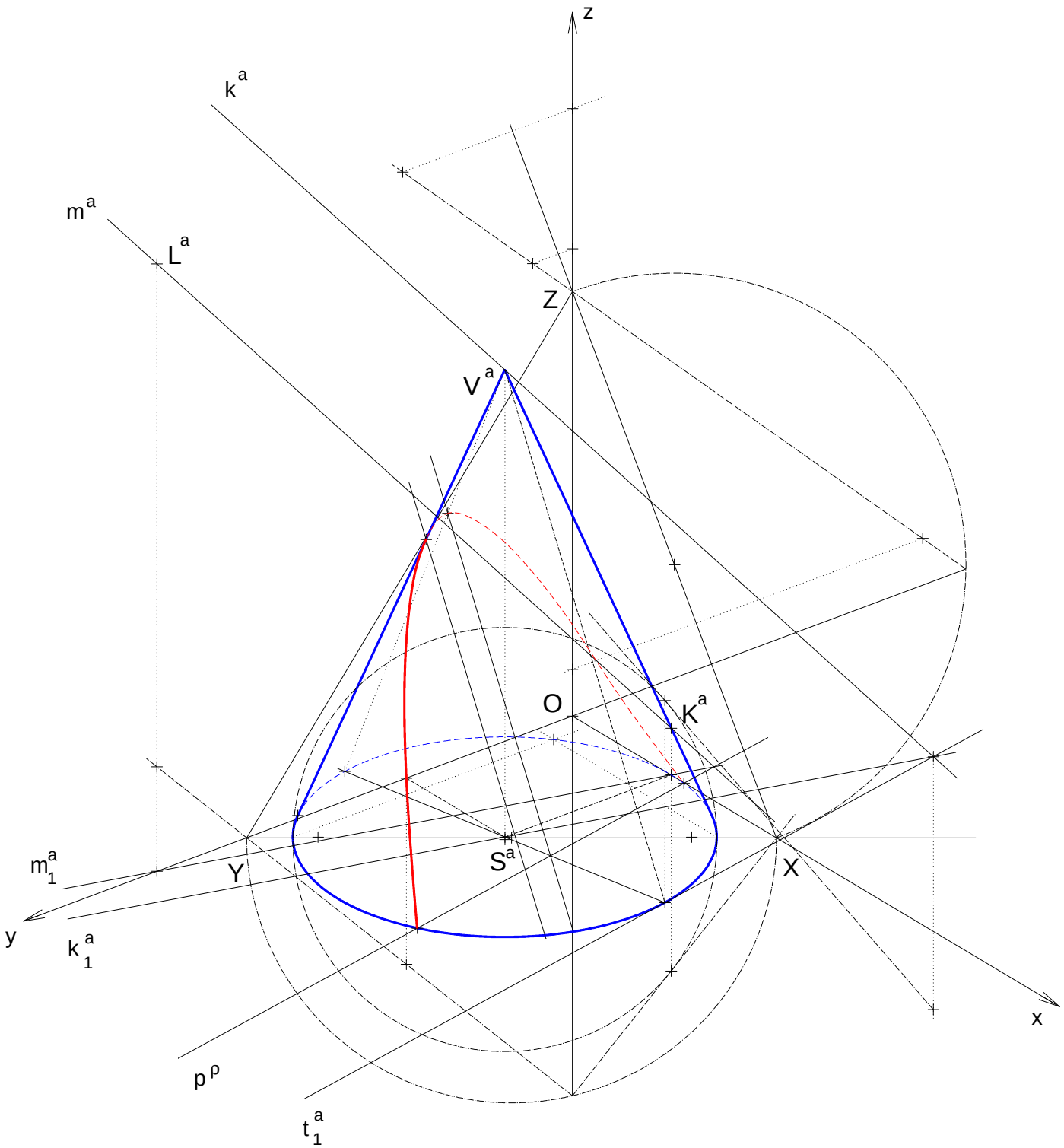
Rotační jednodílný hyperboloid s osou kolmou k π o středu $S[0;5;5]$ a poloosách $a=1{,}8$, $b=2{,}3$ protněte rovinou procházející body $A[-1{,}8;3{,}9;?]$, $B[0{,}5;8{,}3;?]$ ležícími na jeho povrchu v parabole.

PŘÍKLAD 27

Rotační kužel, jehož podstava leží v π, má střed v bodě $S[3;4;0]$, poloměr $r=4$ a jeho výška je $v=10$, protněte rovinou vedenou přímkou určenou body KL, $K[3;0;1]$, $L[0;10;13]$. Řešte v axonometrii určené axonometrickým trojúhelníkem $\Delta(10,12,11)$.

R Y S č.27

PARABOLICKÝ ŘEZ KUŽELE



KRISTÝNA PRUSENOVSKÁ

PŘÍKLAD 28

Bodem $M[2;-2;0]$ veďte příčku mimoběžek $a=N^aU^a$, $b=N^bU^b$, $N^a[-4;0;2]$, $U^a[5;0;5\frac{1}{2}]$, $N^b[-2;0;9]$, $U^b[2;0;6]$. Řešte ve středovém promítání se středem v bodě $S[0;5;4]$ a za průmětnu volte nárysnu μ.

1. $\rho:\ \rho=(aM)$

   Bodem M proložíme přímku c, která prochází U^a a pomocí směrové přímky c' najdeme její stopník N^c. Body N^aN^c určují stopu takto získané roviny n^ρ.

2. $X:\ X=b\cap\rho$

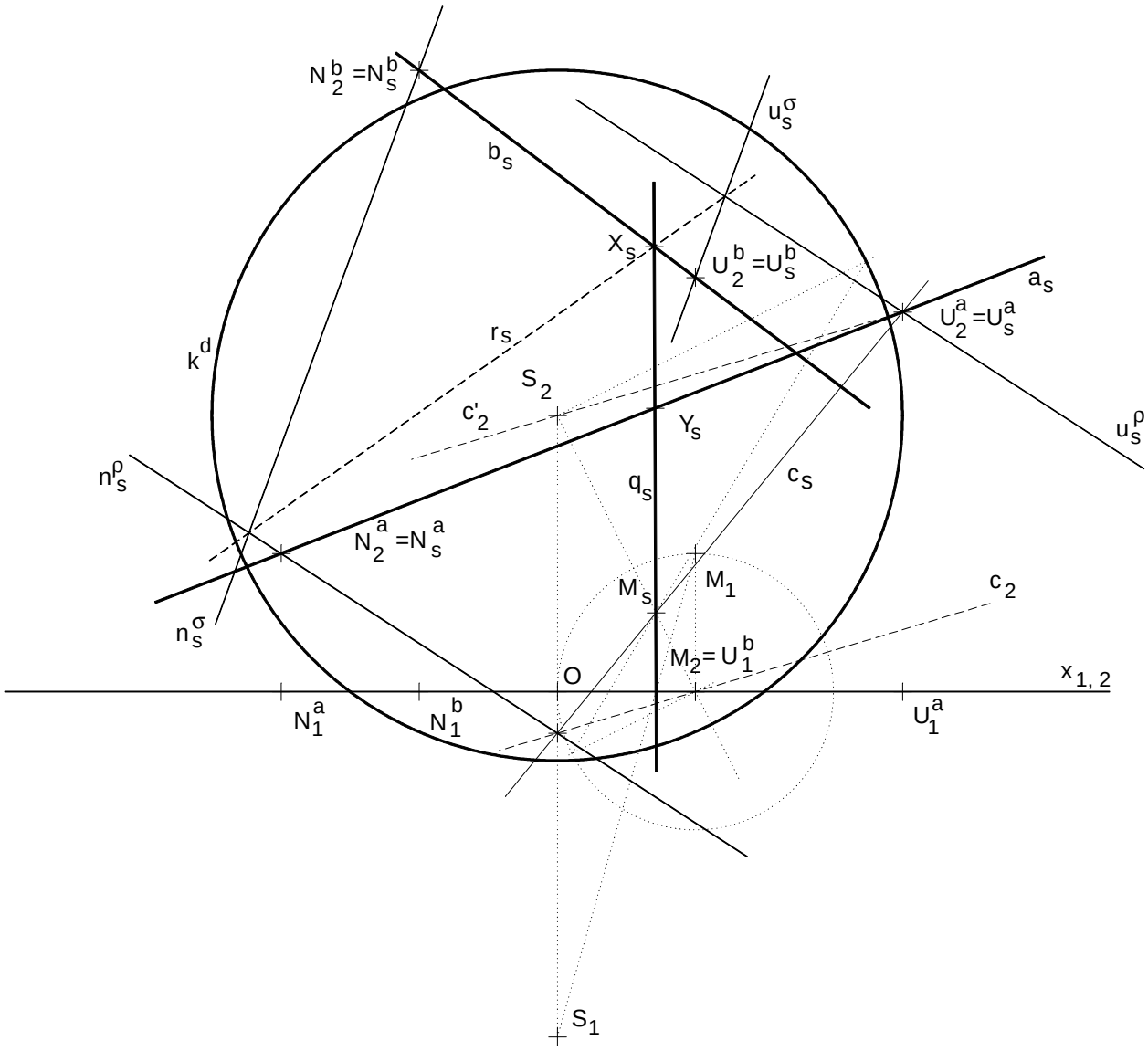
   Přímkou b vedeme rovinu σ, a určíme její průsečnici s rovinou ρ, $r=\sigma\cap\rho$. Bod $X=r\cap b$.

3. $q:\ q=XM$

   Příčka q je určena body XM. Její průsečík s přímkou a označme Y.

R Y S č.28

PŘÍČKA MIMOBĚŽEK



ONDŘEJ MACHŮ

P Ř Í K L A D 29

Zobrazte průnik kosého kruhového kužele s podstavou v π o středu $O[6;9;0]$ a poloměru $r=4$ a s vrcholem v bodě $V[-2{,}5;0;9{,}5]$ s kosým kruhovým válcem s podstavou v π o středu $S[-1{,}5;6{,}5;0]$, poloměru $r=3$ a středem druhé podstavy v bodě $S'[5{,}5;3{,}5;9]$.