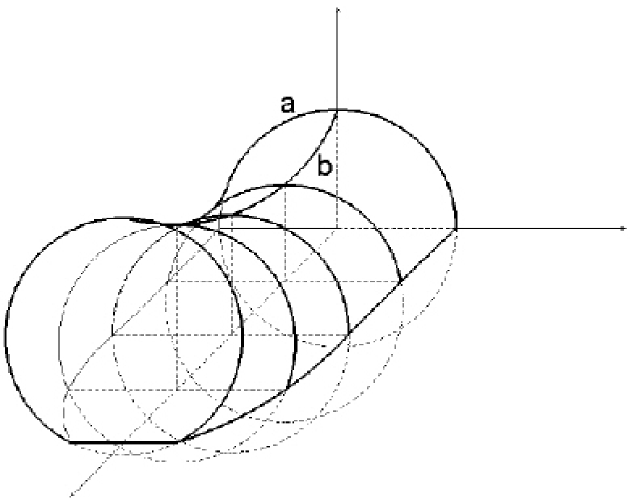
Další plochy technické praxe

Dosud studované plochy mají široké využití jak ve stavební tak ve strojnické praxi. Studovali jsme možnosti jejich konstrukcí, vlastností i využití v praxi. Kromě těchto ploch se ve stavebnictví osvědčily i další plochy, některé z nich byly dokonce vytvořeny na základě požadavků praxe a teprve potom k nim byla vybudována teorie. Budeme se zabývat plochami translačními, klínovými, součtovými a obalovými. Uvedeme základní vlastnosti a především jejich využití v praxi.

Translační plochy

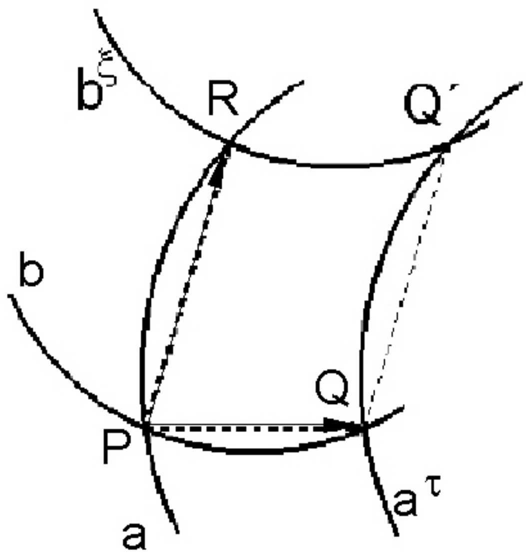
Vznikají rovnoběžným posouváním dané **tvořící křivky *a*** tak, že její pevný bod probíhá při tomto rovnoběžném posuvu danou (pevnou) **křivku řídící *b***. Rovnoběžným posunem dané tvořící křivky ***a*** přitom rozumíme takový její pohyb v prostoru, při kterém opisuje každý její bod shodnou křivku s danou řídící křivkou ***b***.



Posunutí (translace) τ je určeno dvojicí bodů – vzorem **P** a obrazem **Q**.

Plocha Φ je translační, jestliže existují křivky ***a, b*** plochy Φ mající společný bod ***P*** takové, že obraz $\boldsymbol{a}^{\tau}$ křivky ***a*** leží na Φ, kde τ je každé posunutí ***P*** do ***Q***, ***Q*** leží na ***b*** a naopak každým bodem plochy Φ prochází obraz křivky ***a*** v některém takovém posunutí. Křivka ***a*** se nazývá **tvořící**, křivka ***b*** se nazývá **řídící.**

Předpokládejme, že je dána translační plocha Φ s řídící křivkou ***b*** a tvořící křivkou ***a***, které mají společný bod ***P***. Mějme libovolný bod ***Q*** křivky $\boldsymbol{b}^{\xi}$, kde ξ je posunutí křivky ***b*** do křivky $\boldsymbol{b}^{\xi}$, bod ***P*** se v tomto posunutí zobrazí do bodu ***R***, bodu křivky ***a***. Protože ξ je bijektivní zobrazení, existuje na ***b*** jediný vzor ***Q*** bodu ***Q´***, tj. $\boldsymbol{Q}'=\boldsymbol{Q}^{\xi}$. Je-li τ posunutí ***P*** do ***Q***, pak podle definice křivka $\boldsymbol{a}^{\tau}$ leží na Φ. Z vlastností posunutí plyne, že $\boldsymbol{R}^{\tau} = \boldsymbol{Q}'$ a z toho ***Q´*** leží na Φ. Platí tedy, že $\boldsymbol{b}^{\xi}$ leží na Φ.

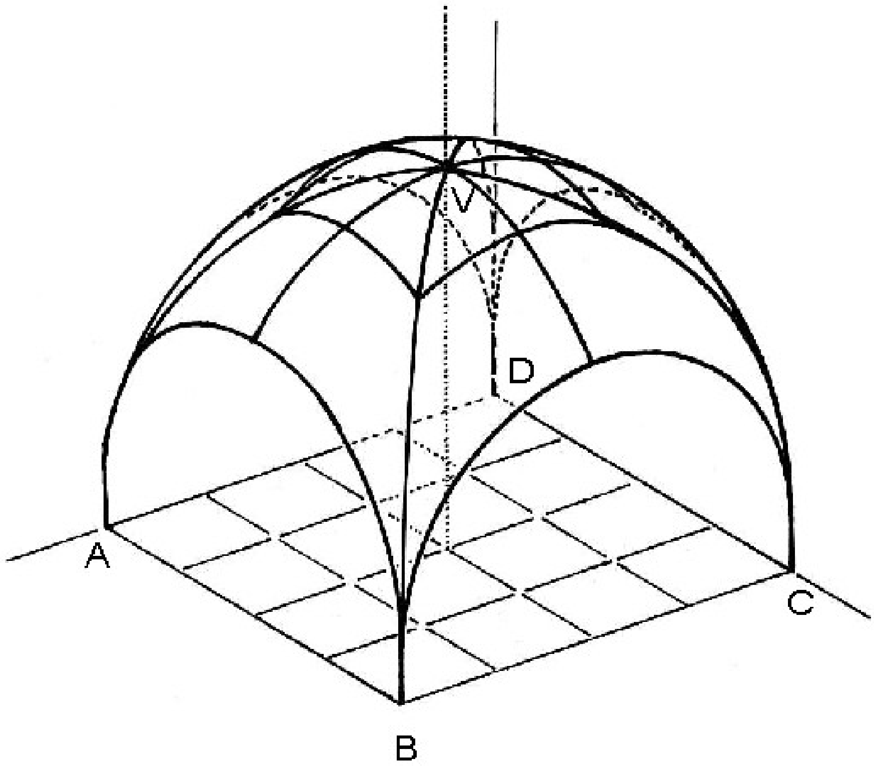


Rovnoběžným posouváním křivky ***a*** po křivce ***b*** a rovnoběžným posouváním křivky ***b*** po křivce ***a*** získáme na translační ploše Φ dvě soustavy křivek, přičemž každá z těchto soustav je tvořena navzájem shodnými křivkami.

Označme ***(a)*** množinu obrazů křivky ***a*** ve všech posunutích τ, kde ***P*** se zobrazí do ***Q***, a ***(b)*** množinu obrazů křivky ***b*** v posunutích ξ, ***P*** se zobrazí do ***R***. Sjednocení množin ***(a), (b)*** tvoří síť křivek na ploše Φ, každým bodem na Φ prochází právě jedna křivka množiny ***(a)*** a právě jedna křivka množiny ***(b)***. Libovolné dvě křivky ***a´*** z ***(a)*** a ***b´*** z ***(b)*** můžeme považovat za tvořící a řídící křivky plochy Φ a to v jakémkoli pořadí.

Z dosud probraných ploch patří mezi translační plochy plochy válcové (síť tvoří řídící křivka a povrchové přímky), normální cyklická šroubová ploch (síť se skládá z kružnic a šroubovic plochy), paraboloidy (síť tvoří dvě paraboly). V praxi se nejčastěji používají tzv. **kuželosečko-kuželosečkové** translační plochy, síť na těchto plochách je tvořena kuželosečkami. Paraboloidy jsou parabolicko-parabolické translační plochy.

Translační plochy se používají hlavně pro konstrukci kleneb, klenby mají výborné statické vlastnosti. Průnik dvou translačních ploch kuželosečko-kuželosečkových se využívá rovněž jako křížová klenba, viz. obr. Řídící i tvořící křivky obou ploch jsou ve směru úhlopříčky čtverce ***ABCD*** šikmo souměrné podle svislé roviny procházející druhou úhlopříčkou. Plocha má ve vrcholu ***V*** horizontální tečnou rovinu.

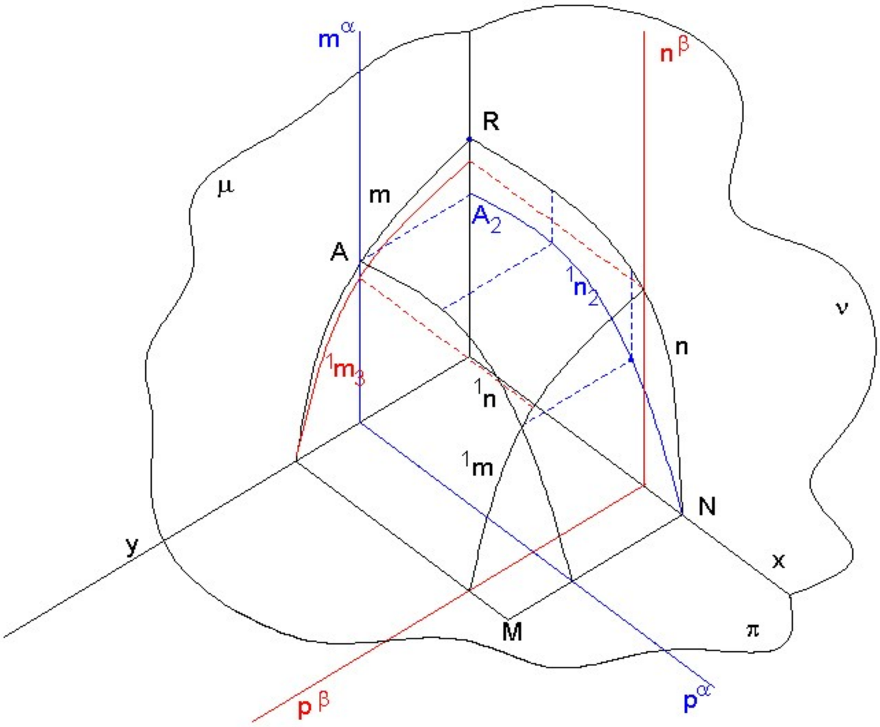


Klínové plochy

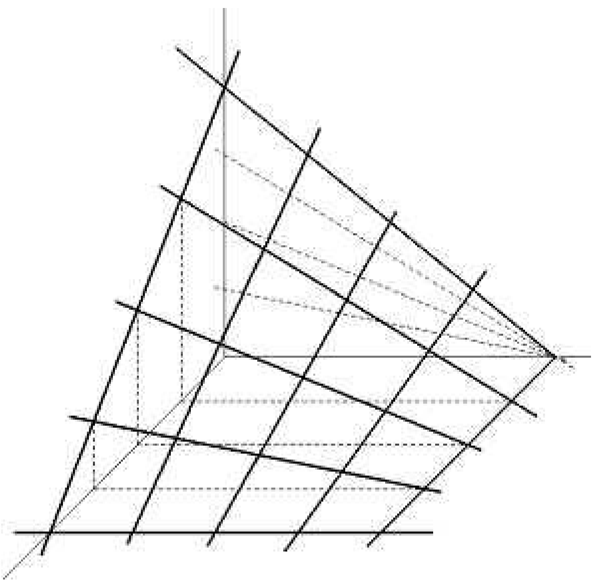
Translační plochy mají tu nevýhodu, že jsou vodorovnou rovinou proťaty v křivce, což může ve stavebnictví působit konstrukční potíže. Toto vyřešily klínové plochy, u nichž se uplatnily vlastnosti translačních ploch a navíc jsou vodorovnou rovinou proťaty v přímce. Klínové plochy jsou zobecněním translačních ploch v tom smyslu, že křivka tvořící, která se v případě translačních ploch pouze spojitě posouvá, se v případě klínových ploch při posunu ještě spojitě afinně transformuje.

Mějme dány tři navzájem kolmé roviny π, μ, ν a křivky $\boldsymbol{m}$ v μ a $\boldsymbol{n}$ v ν, které mají společný bod $\boldsymbol{R}$. Klínová plocha určená křivkami ***m, n*** je vytvořena všemi křivkami, které leží v rovinách rovnoběžných s ν, protínají $\boldsymbol{m}$ a jejichž pravoúhlé průměty do ν odpovídají křivce $\boldsymbol{n}$ v pravoúhlé afinitě o ose $\boldsymbol{x}$ (průsečnice π a ν). Křivka $\boldsymbol{n}$ je **tvořící,** $\boldsymbol{m}$ **řídící** křivka klínové plochy Φ. Rovina π se nazývá **základní**. Rovina α rovnoběžná s ν protíná plochu v křivce ${}^{1}\boldsymbol{n}$. Její pravoúhlý průmět ${}^{1}\boldsymbol{n}_2$ do roviny ν odpovídá křivce $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_2$ v pravoúhlé afinitě o ose $\boldsymbol{x}$ (průsečnice π a ν), ve které bodu $\boldsymbol{R}$ odpovídá bod $\boldsymbol{A}_2$, kde $\boldsymbol{A}_2$ je pravoúhlý průmět do ν průsečíku $\boldsymbol{A}$ roviny α a křivky $\boldsymbol{m}$. Všechny průsečíky křivek ${}^{i}\boldsymbol{n}$ se základní rovinou leží na úsečce $\boldsymbol{MN}$.

Vezmeme-li rovinu β rovnoběžnou s μ a najdeme řez plochy touto rovinou, dostáváme křivku ${}^{1}\boldsymbol{m}$. Tato křivka protíná všechny křivky ${}^{i}\boldsymbol{n}$. Pravoúhlý průmět ${}^{1}\boldsymbol{m}_3$ křivky ${}^{1}\boldsymbol{m}$ do roviny μ je obrazem křivky $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_3$ v pravoúhlé afinitě o ose $\boldsymbol{y}$ (průsečnice π a μ). Podobně jako na translačních plochách existují na klínových plochách dvě význačné a navzájem rovnoprávné soustavy křivek, křivky ***(n)*** jsou afinní s křivkou $\boldsymbol{n}$ a křivky ***(m)*** jsou afinní s křivkou $\boldsymbol{m}$. Každým, bodem plochy prochází právě jedna křivka množiny ***(n)*** a právě jedna křivka množiny ***(m)***. Je-li osa afinity nevlastní, pak je plocha klínová plochou translační, tj. translační plochy jsou speciálním případem ploch klínových.

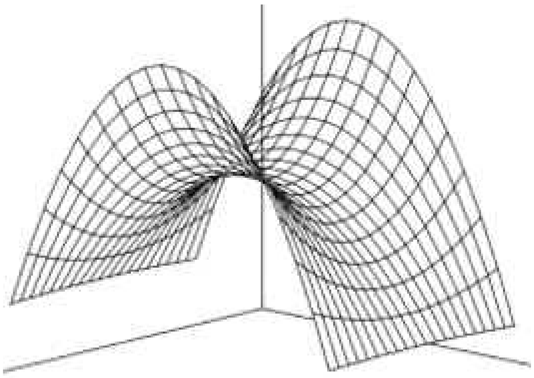


Nejčastěji se v praxi za řídící a tvořící křivky volí kuželosečky, plochy pak opět nazýváme kuželosečko-kuželosečkové. Speciálně, jsou-li tvořící a řídící křivka přímky, pak křivky jedné soustavy klínové plochy tvoří přímky protínající další přímku a rovnoběžné s rovinou, jedná se tedy o hyperbolický paraboloid.



Prvních klínových ploch použil Felix Candela např. při stavbě laboratoře kosmického výzkumu na univerzitě v Mexico City v roce 1951. Pro konstrukce těchto ploch však nebyla známa žádná teorie a proto řešil konstrukci intuitivně.

Klínové plochy pak byly experimentálně studovány např. akademikem Bedřichem Hacarem, jejich teorii potom vypracoval profesor František Kadeřávek po druhé světové válce, plochy pak nazval klínové. Podle akademika Hacara je nazvána Hacarova plocha, obdoba hyperbolického paraboloidu, kterou vodorovná rovina protíná nikoli v hyperbole, ale v přímce.

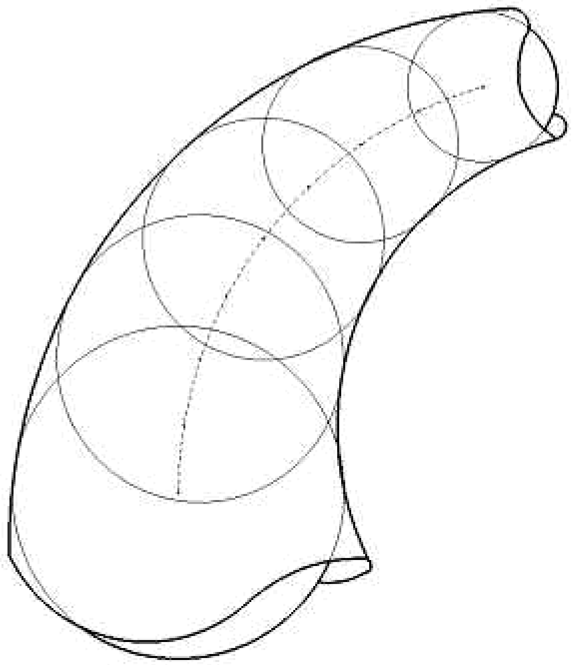


Obalové plochy

Existuje-li plocha, která se dotýká všech ploch dané jednoparametrické množiny ploch Γ, pak se nazývá **obalovou plochou (obálkou)** množiny Γ. Každá plocha z Γ se nazývá **tvořící.** Obalová plocha se dotýká tvořících ploch podél křivek, které nazýváme **charakteristiky.** Tvořící a obalová plocha mají v každém bodě charakteristiky společnou tečnou rovinu. Obalovou plochu vytváříme obvykle spojitým pohybem tvořící plochy, která se ještě může podle nějakého předpisu měnit.

Rovina rovnoběžná (různoběžná) s přímkou ***o*** obaluje při rotačním pohybu kolem osy rotační válcovou (kuželovou) plochu. Rotační válcová (kuželová) plocha mohou také vzniknout jako obálka kulových ploch, jejichž středy se posouvají po ose ***o*** a jejich poloměr se nemění (spojitě mění). Obě plochy jsou speciálním případem rozvinutelných ploch, které vznikají jako obálka jednoparametrické množiny rovin (charakteristikami jsou přímky obalující hranu vratu). Obecná rotační plocha je rovněž plochou obalovou, tvořící plochy mohou být různé. Můžeme ji brát jako obálku kuželových ploch s vrcholy (v bodech rovníku a hrdla nevlastními) ležícími na ose rotace, jejichž charakteristiky jsou rovnoběžky plochy. Dále je rotační plocha vytvořena jako obálka ploch kulových, jejichž středy leží na ose a charakteristiky jsou rovnoběžky. A také je obecná rotační plocha obálkou válcových ploch opsaných podél meridiánů.

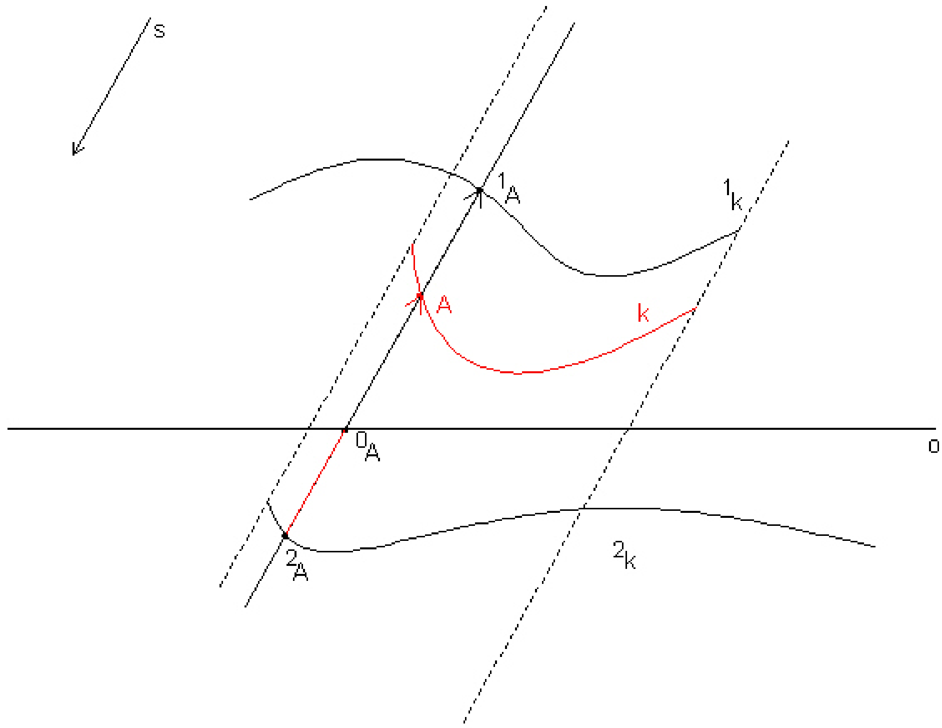
V praxi se často používají obálky kulových ploch, jejichž střed se pohybuje po křivce ***k***, poloměr kulových ploch je buď konstantní nebo se spojitě mění. Tyto plochy se nazývají **rourové**.



Je-li *k* přímka jedná se o kruhové válcové nebo kuželové plochy, je.-li k kružnice a poloměr konstantní dostaneme anuloid a pro ***k*** šroubovici a konstantní poloměr je obálkou Archimedova serpentina.

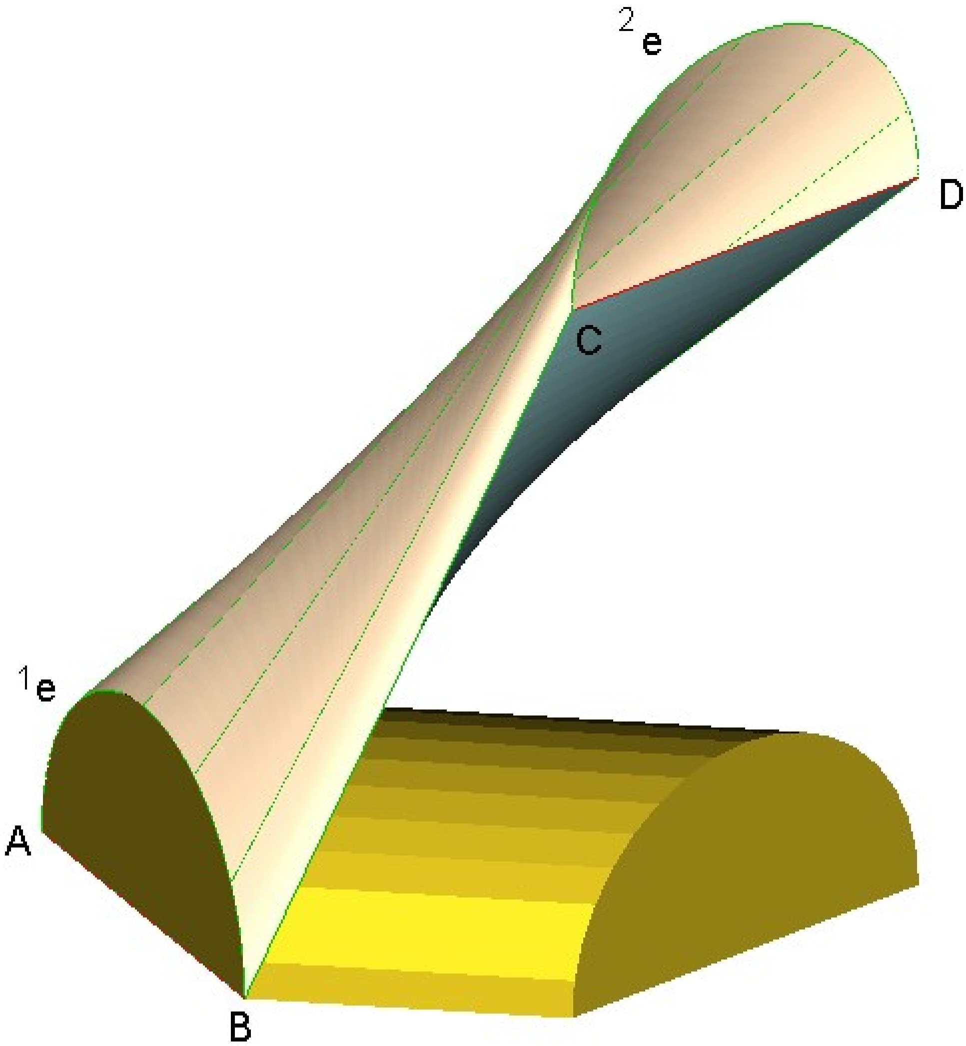
Součtové plochy

Budeme používat orientovanou vzdálenost $\|AB\|$ bodů ***A, B***. Nejprve si zadefinujeme součet bodů v rovině. Mějme dánu rovinu π , v ní přímku ***o*** a směr *s* různoběžný s ***o***. Na přímce ***a*** směru ***s*** nechť jsou dány body ^{1}A, ^{2}A a označme ^{0}A průsečík přímky ***a*** s osou ***o***. Pak existuje jediný bod ***A*** přímky ***a***, pro který platí $\|{}^{0}A\,{}^{1}A\|=\|{}^{2}A\,A\|$. Bod ***A*** se nazývá **součet** bodů ^{1}A, ^{2}A a zapisujeme $A={}^{1}A+{}^{2}A$ Jsou-li ^{1}k, ^{2}k křivky v rovině π, pak **součtem *k* křivek** ^{1}k, ^{2}k ($k={}^{1}k+{}^{2}k$) nazýváme množinu součtů bodů ^{1}A na ^{1}k a ^{2}A na ^{2}k. Součet je definován jen pro ty dvojice bodů, které leží na přímkách směru ***s***. Je-li ^{2}k přímka rovnoběžná s osou ***o***, pak je ***k*** křivka, která odpovídá ^{1}k v posunutí ve směru ***s***.



Definici součtu zobecňujeme pro prostor takto: Mějme dánu rovinu π (základní) a směr ***s*** různoběžný s π. Součtem bodů $\boldsymbol{{}^1A}$, $\boldsymbol{{}^2A}$ ležících na přímce a rovnoběžné s ***s*** je bod ***A***, pro který platí $\|{}^0A\,{}^1A\| = \|{}^2A\,A\|$, kde $\boldsymbol{{}^0A}$ je průsečík přímky ***a*** s rovinou π. Nechť ${}^1\Phi$, ${}^2\Phi$ jsou plochy. Pokud množina všech možných součtů bodů $\boldsymbol{{}^1A}$ (leží na ${}^1\Phi$), $\boldsymbol{{}^2A}$ (leží na ${}^2\Phi$) nazveme ji **součtová plocha.**

Příkladem součtové plochy je např. Freziérův cylindroid, který vzniká jako součet rotační válcové plochy s osou v π (základní rovina) a hyperbolického paraboloidu určeného zborceným čtyřúhelníkem ***ABCD***, kde ***A, B, C, D*** jsou body omezující oblouky elips $\boldsymbol{{}^1e}$, $\boldsymbol{{}^2e}$.



Dalším příkladem součtové plochy je osová cyklická šroubová plocha, která vznikne jako součet anuloidu a souosé schodové plochy. V případě kadeře je místo anuloidu kulová plocha.

Jinou součtovou plochu můžeme vytvořit např. takto: Mějme dány dvě válcové plochy s navzájem kolmými površkami rovnoběžnými s π (základní rovina). Bereme do úvahy jen části ploch ležící nad π. Součtová plocha je dána základní rovinou π a směrem kolmým k π.

Dá se ukázat, že plochy translační , jejichž řídící a tvořící křivky jsou rovinné, lze vytvořit jakou součtové plochy při vhodné volbě dvou válcových ploch, základní rovině a směru.