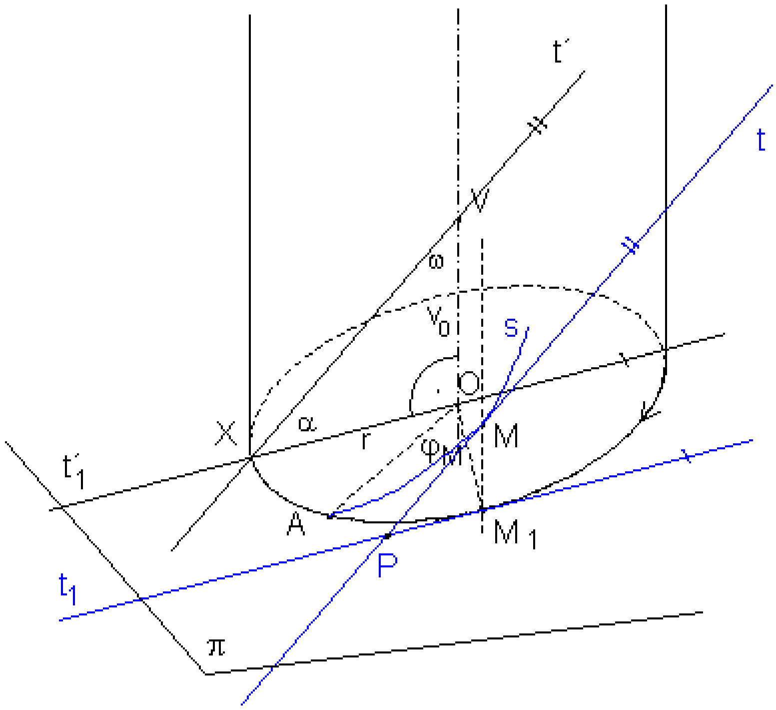
KRUHOVÁ ŠROUBOVICE A JEJÍ VLASTNOSTI

Šroubový pohyb vzniká složením otáčení kolem osy ***o*** a posunutí ve směru osy ***o***, přičemž oba pohyby jsou spojité a rovnoměrné. Jestliže při pohybu po ose "dolů" je otáčení ve směru hodinových ručiček nazveme pohyb **pravotočivý** (při klesání se otáčíme za pravou rukou), při otáčení proti směru hodinových ručiček se jedná o pohyb **levotočivý**. Známe-li ještě velikost v_0 posunutí při otočení o 1 radián, je šroubový pohyb jednoznačně určen a ke každému posunutí můžeme jednoznačně určit velikost otočení a naopak, v_0 nazýváme **parametr šroubového pohybu**. Velikost posunutí a otočení jsou vázány vztahem $z_M=\omega_M v_0$, kde z_M je posutí a ω_M otočení daného bodu ***M***. Šroubový pohyb je jednoznačně určen osou, orientací a parametrem. Posunutí $v = 2\pi . v_0$, které odpovídá otočení o 2π nazýváme výška závitu.

Je-li dán šroubový pohyb, trajektorie bodu ***A*** neležícího na ose se nazývá **(kruhová) šroubovice**. Vzdálenost ***r*** bodu ***A*** od osy ***o*** šroubového pohybu se nazývá **poloměr šroubovice**, část šroubovice odpovídající výšce závitu se nazývá **závit šroubovice** a část šroubovice odpovídající parametru šroubového pohybu se nazývá **redukovaná výška závitu**.

Tečny šroubovice mají konstantní odchylku ω od osy o šroubového pohybu a tedy i konstantní odchylku $\alpha=\pi/2-\omega$ od roviny kolmé k ose ***o***. Číslo $tg\ \alpha$ nazýváme spád šroubovice, šroubovice je křivka konstantního spádu a také geodetická křivka na rotační válcové ploše.

Vedeme-li libovolným bodem ***V*** osy přímky rovnoběžné s tečnami šroubovice, vytvoří rotační kuželovou plochu, kterou nazýváme **směrová kuželová plocha**. Rovina kolmá k ose ve vzdálenosti v_0 od vrcholu ***V*** protne směrovou kuželovou plochu v kružnici $k=(O,r)$, kde ***r*** je poloměr šroubovice. Pravoúhlý trojúhelník ***VOX***, kde ***X*** je bod kružnice ***k*** (jeho odvěsny mají po řadě velikost v_0 a ***r)*** nazýváme **základní trojúhelník** šroubovice. Jeho odvěsna je rovnoběžná s tečnou šroubovice.



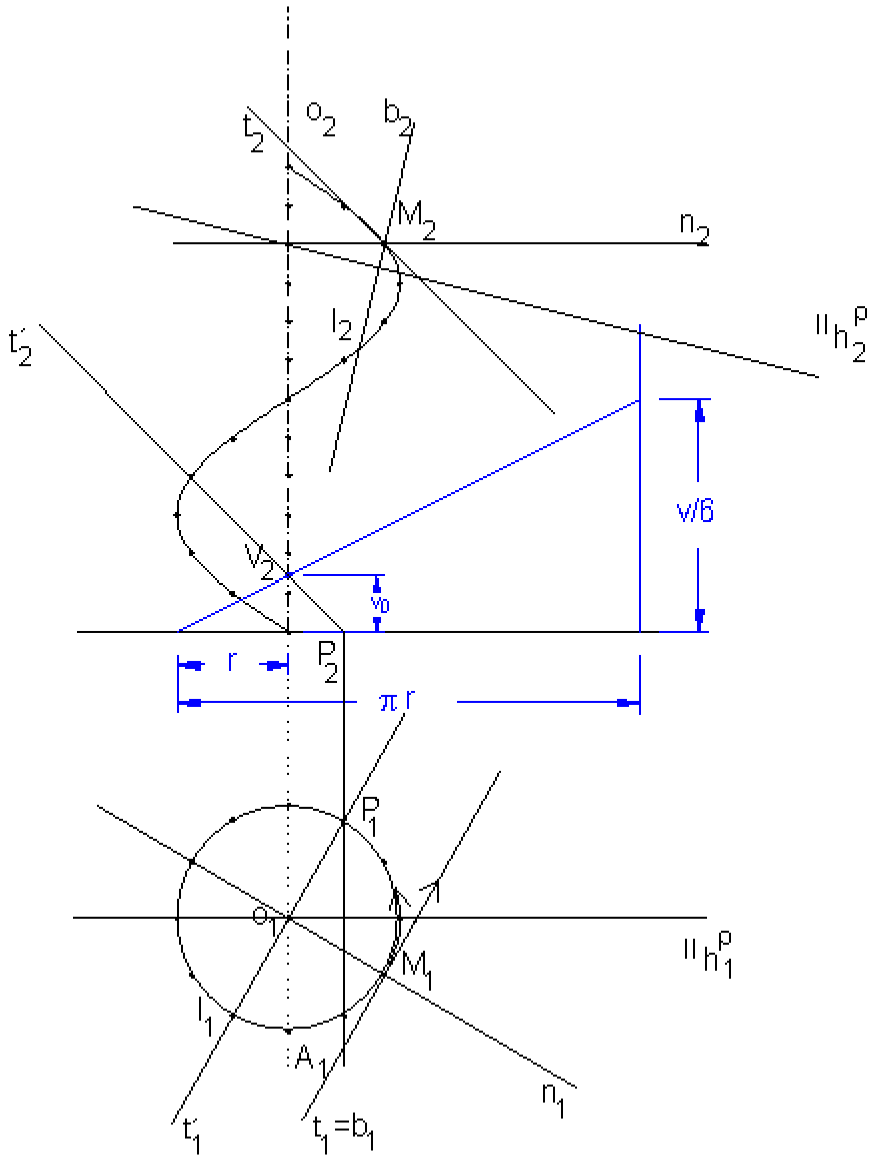
Nechť ***M*** je bod šroubovice a ***M_1*** jeho pravoúhlý průmět do roviny π. V bodě ***M*** sestrojíme tečnu **t** a určíme její průsečík ***P*** s rovinou π. Trojúhelník ***PMM_1*** je podobný základnímu trojúhelníku a proto platí ***$|PM_1| = r\,\varphi_M$***, což je velikost oblouku ***AM***. Body ***P*** tedy vytvoří evolventu kružnice ***k***.

Př.: V Mongeově projekci sestrojte jeden závit pravotočivé šroubovice **s**, která je dána osou ***o***, bodem ***A*** a redukovanou výškou závitu ***v_0***. V bodě ***M*** této šroubovice určete doprovodný Frenetův repér.

Osa ***o*** šroubovice ***s*** je kolmá k půdorysně, bod ***A*** leží v půdorysně. Křivku sestrojíme bodově, určíme dvanáct jejích bodů, které odpovídají otočení o 30°. Půdorysem šroubovice je kružnice ***$k_1=(o_1,|o_1A_1|)$***. Určíme výšku v závitu šroubovice. Platí ***$v = 2\pi v_0$***, odtud ***$v/(2\pi r)=v_0/r$***. Sestrojíme-li tedy trojúhelník podobný základnímu trojúhelníku, jehož jedna odvěsna bude mít délku ***πr***, pak velikost druhé odvěsny bude rovna polovině výšky závitu. Rozdělením této úsečky na šestiny získáme posunutí, které odpovídá otočení o 30°. Odvěsnu délky ***πr*** získáme například Kochaňského rektifikací kružnice ***s_1***. Sestrojíme půdorysy i nárysy dvanácti bodů šroubovice otočených o 30°a posunutých o ***v/12***. Stoupání šroubovice je proti šipce.

Vybereme libovolný bod ***M*** šroubovice ***s*** a v něm sestrojíme tečnu ***t***, hlavní normálu ***n*** a binormálu ***b***.

Sestrojíme směrovou kuželovou plochu, její vrchol ***V*** volíme ve výšce ***v_0*** na půdorysnou. Povrchové přímky této kuželové plochy jsou rovnoběžné s tečnami šroubovice ***s***, půdorysna kuželovou plochu protíná v kružnici ***s_1***. Půdorysem tečny ***t*** v bodě ***M*** je tečna ***t_1*** kružnice ***s_1***. Známe orientaci šroubovice a určíme tak i klesání tečny. (Šipka z bodu dotyku musí vycházet stejným směrem). Vrcholem ***V*** směrové kuželové plochy vedeme přímku ***t´*** rovnoběžnou s přímkou ***t***. Půdorys ***$t´_1$*** protíná kružnici $\boldsymbol{s_1}$ v půdoryse půdorysného stopníku ***P´*** přímky ***t´***. Pomocí něj určíme nárys $\boldsymbol{t'_2}$ přímky ***t´***. Nárys $\boldsymbol{t_2}$ tečny ***t*** je pak rovnoběžný s $\boldsymbol{t'_2}$ a prochází bodem $\boldsymbol{M_2}$. Hlavní normála ***n*** šroubovice leží v normálové rovině a je kolmá na tečnu i na osu šroubového pohybu. Odtud vyplývá i její konstrukce. Nárys $\boldsymbol{n_2}$ je rovnoběžný se základnicí a hlavní normála je tedy hlavní přímkou první osnovy každé roviny, která přímku ***n*** obsahuje. Půdorys $\boldsymbol{n_1}$ je pak kolmý na $\boldsymbol{t_1}$. Binormála ***b*** je kolmá na oskulační rovinu určenou tečnou ***t*** a hlavní normálou ***n***. Půdorys $\boldsymbol{b_1}$ je kolmý na $\boldsymbol{n_1}$, což znamená, že splývá s $\boldsymbol{t_1}$ (Rektifikační rovina je tedy kolmá k π.) Nárys $\boldsymbol{b_2}$ určíme pomocí libovolné hlavní přímky druhé osnovy oskulační roviny. Zvolíme libovolnou přímku druhé osnovy oskulační roviny, sestrojíme její nárys a $\boldsymbol{b_2}$ je kolmice k nárysu této přímky.



Pozn. V předchozím příkladě jsme měli zadáno $\boldsymbol{v_0}$ a konstruovali jsme výšku závitu $\boldsymbol{v}$. Protože 1 radián je přibližně 60° nebudeme v dalších příkladech sestrojovat $\boldsymbol{v}$, ale položíme $\boldsymbol{v_0=v/6}$.

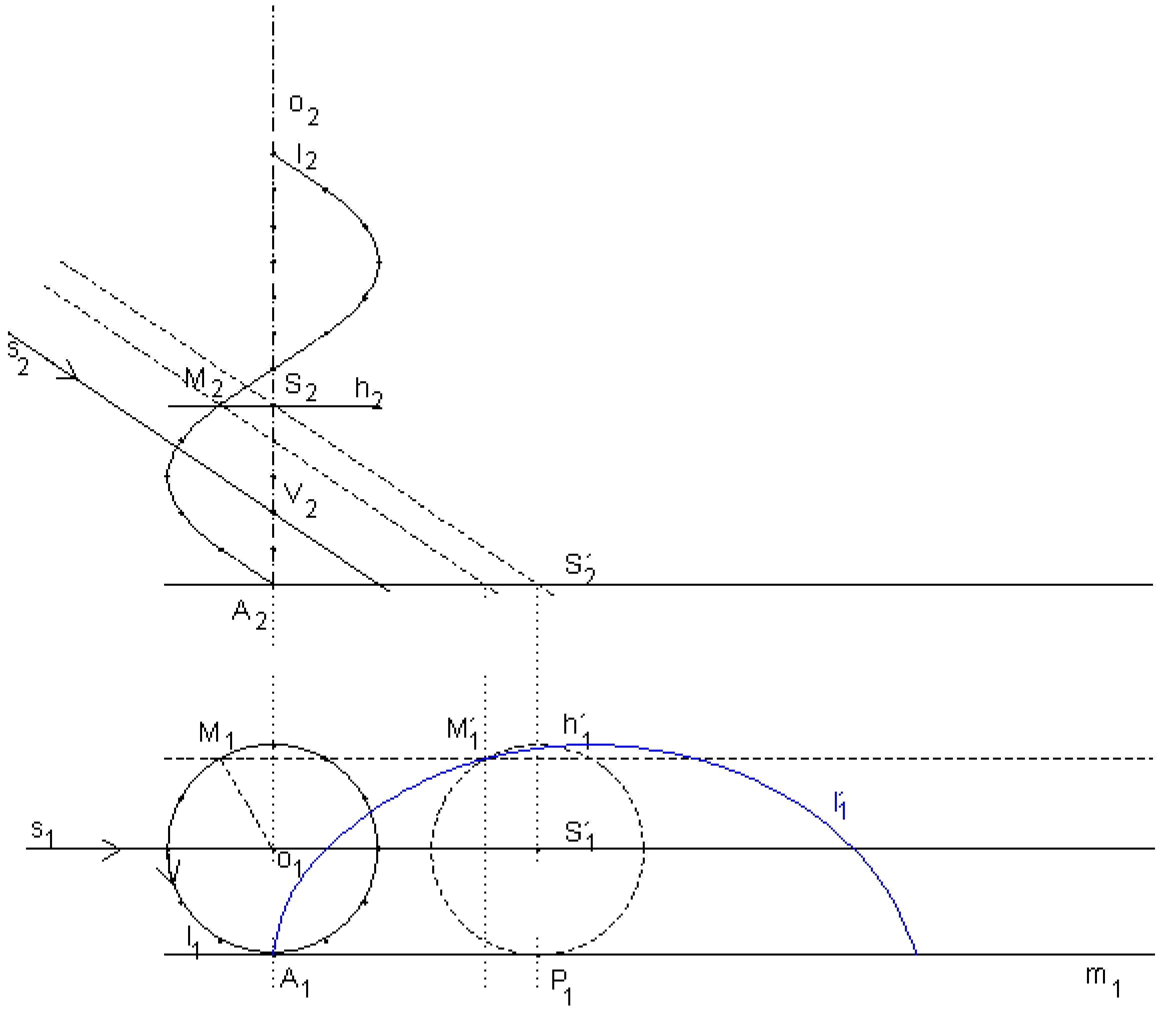
Rovnoběžné osvětlení šroubovice.

Nejprve sestrojíme stín $\boldsymbol{l'}$ šroubovice $\boldsymbol{l}$ do roviny π kolmé k ose $\boldsymbol{o}$. Označíme α odchylku povrchových přímek směrové kuželové plochy od π (***tg*** α je spád šroubovice) a φ odchylku směru osvětlení od π. Budeme určovat vržený stín šroubovice $\boldsymbol{l}$ do roviny π pro tři případy a zvolíme směr $\boldsymbol{s}$ osvětlení rovnoběžně s nárysnou a procházející V.

1. $\alpha = \varphi$

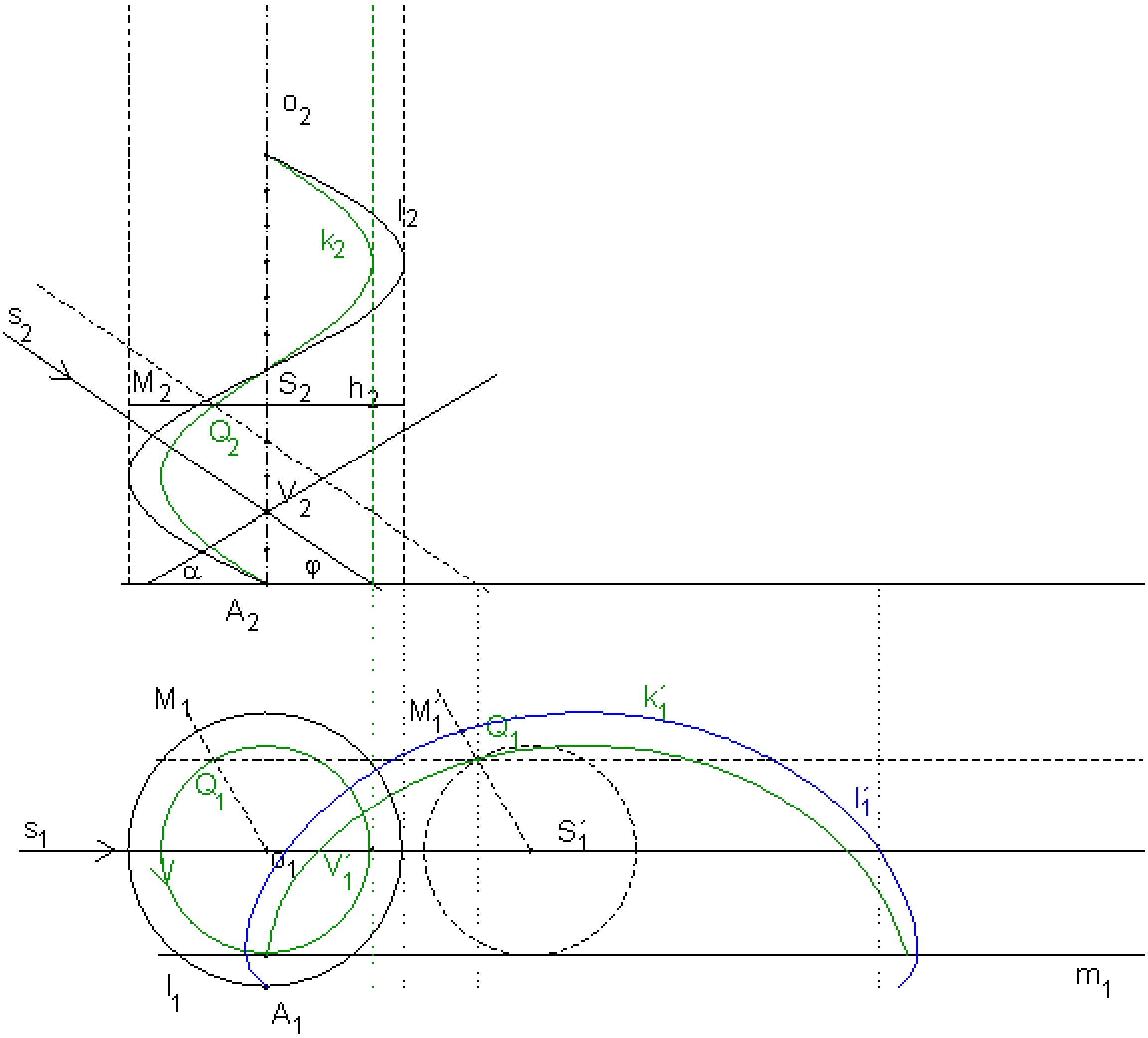
Zvolíme libovolný bod $\boldsymbol{M}$ šroubovice $\boldsymbol{l}$. Tento bod leží rovněž na kružnici $\boldsymbol{h}$ rotační válcové plochy, na níž leží i šroubovice $\boldsymbol{l}$. Sestrojíme vržený stín kružnice $\boldsymbol{h}$ a bodu $\boldsymbol{M}$ do π. Nechť $\boldsymbol{m_1}$ je tečna kružnice $\boldsymbol{l_1}$ v bodě $\boldsymbol{A_1}$ a $\boldsymbol{P_1}$ její bod dotyku s kružnicí $\boldsymbol{h'_1}$. Platí $\boldsymbol{|A_1P_1|=|O_1S'_1|=|A_2S'_2|}$ a základní trojúhelník je podobný trojúhelníku $\boldsymbol{S_2A_2S'_2}$. Odtud $\boldsymbol{|A_2S'_2|:|A_2S_2|=r:v_0}$. Bod M jsme získali přešroubováním bodu $\boldsymbol{A}$, označme úhel otočení ω_M, velikost posunutí $\boldsymbol{z_M=|A_2S_2|}$, ke každému otočení určíme jednoznačně posunutí ze vztahu $\boldsymbol{z_M=\omega_M v0}$, proto $\boldsymbol{|A_2S'_2|:(\omega_M v_0) =r:v_0}$. Z předchozích vztahů dostáváme $\boldsymbol{|A_1P_1|=r\omega_M}$, což je rovno velikosti oblouku $\boldsymbol{P_1M'_1}$. Body $\boldsymbol{M'_1}$ tedy vyplní prostou cykloidu.

Odvodili jsme: Vrženým stínem šroubovice do roviny p kolmé k ose je prostá cykloida, jestliže směr osvětlení má stejnou odchylku od roviny π jako tečny šroubovice $\boldsymbol{l}$.



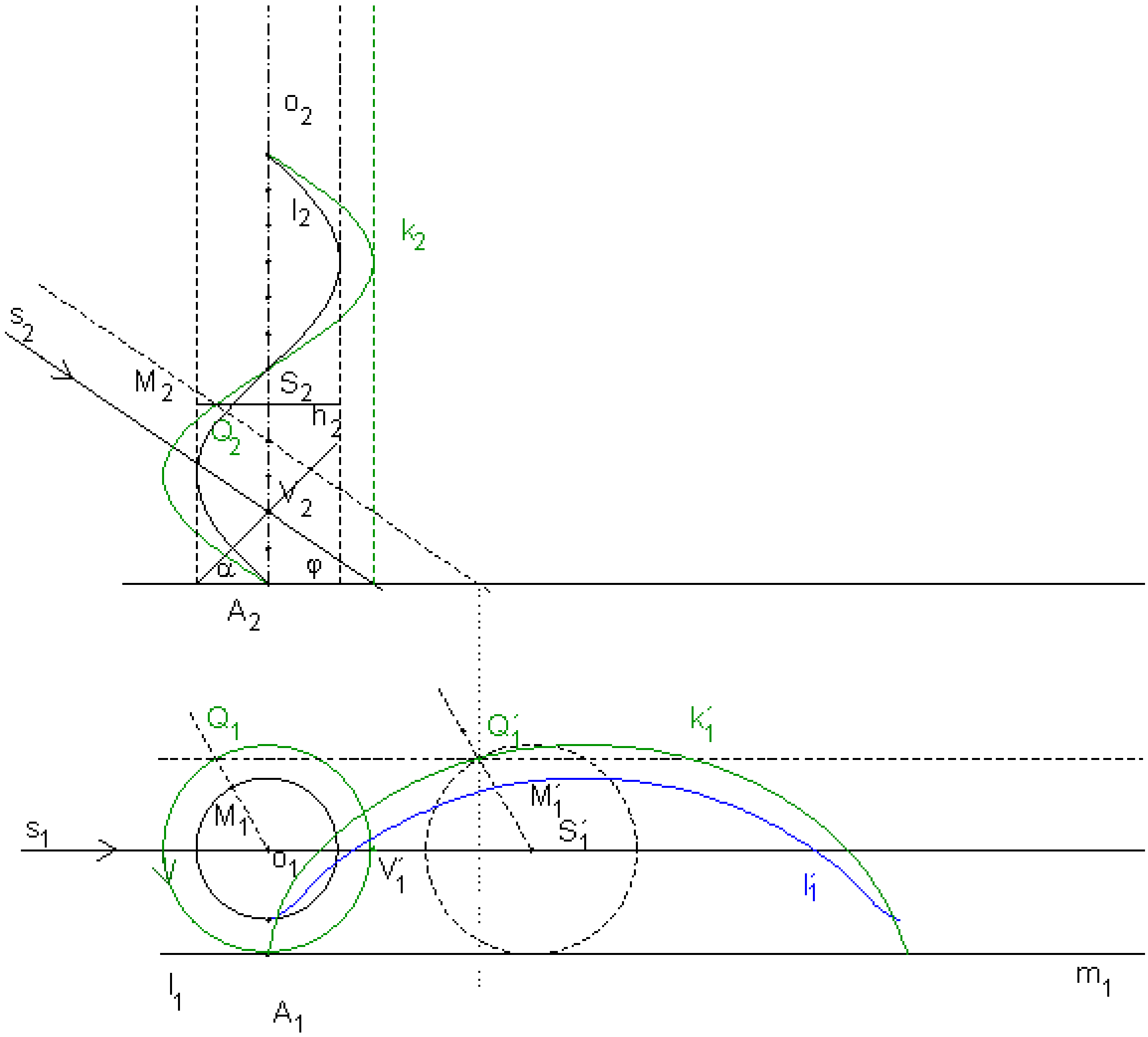
2. $\alpha < \varphi < \pi/2$

Uvažujme šroubovici **k** spádu ***tg*** φ vytvořenou stejným šroubovým pohybem. Hledáme vržený stín bodu **M** šroubovice ***l*** do π. Nejprve sestrojíme bod ***Q*** ležící na šroubovici ***k*** a ve stejné rovině jako kružnice ***h*** bodu ***M***. Sestrojíme vržený stín ***Q´*** do π, víme, že ***Q´*** leží na prosté cykloidě ***k´***. Bod ***M´₁*** leží na polopřímce ***S´₁Q´₁***, vně úsečky ***S´₁Q´₁***, body ***M´₁*** vyplní prodlouženou cykloidu.



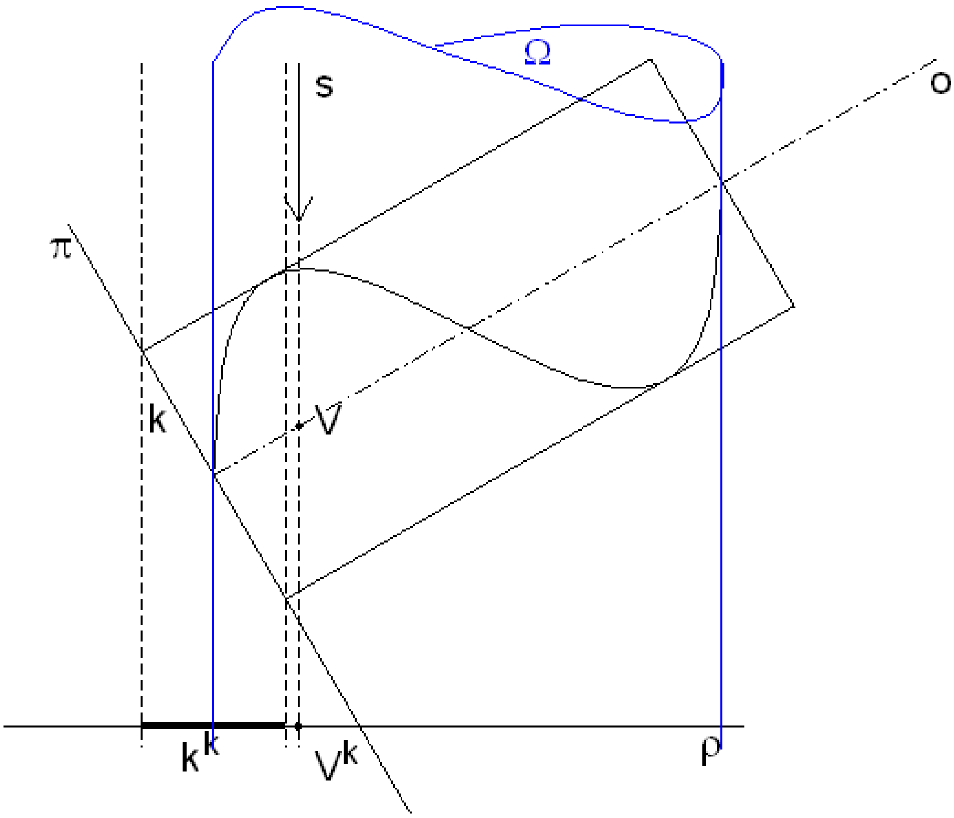
3. $0 < \varphi < \alpha$

Zvolíme stejný postup jako v předchozím případě, bod ***M´₁*** leží teď uvnitř úsečky ***S´₁Q´₁*** a vrženým stínem do π je zkrácená cykloida.

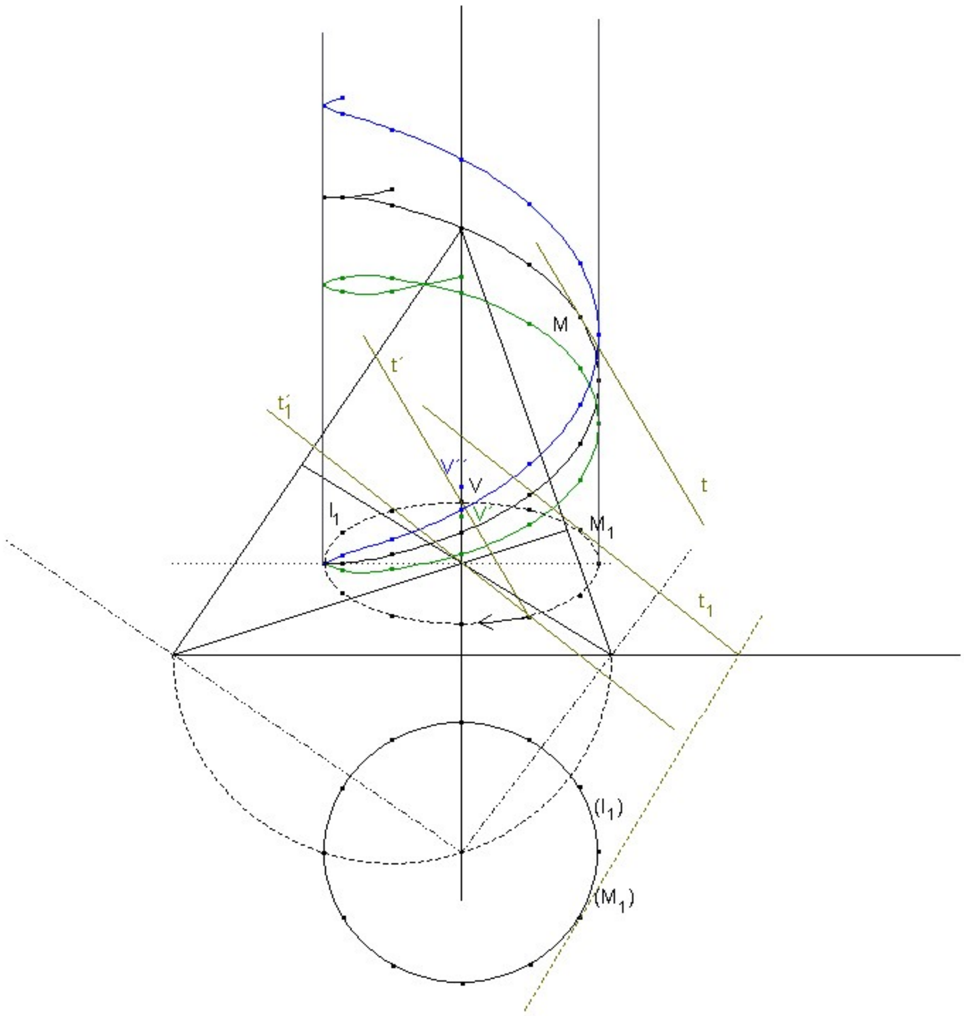


O tvaru vrženého stínu do π můžeme také rozhodnout podle polohy vrženého stínu ***V´*** vrcholu směrové kuželové plochy do π, křivka ***l´₁*** je prostá (prodloužená, zkrácená) cykloida, jestliže ***V´₁*** leží na (uvnitř,vně) kružnice ***l₁***. Tohoto využijeme při konstrukci stínu šroubovice vrženého do obecné roviny a také pro konstrukci šroubovice s osou v obecné poloze či v jiných projekcích.

Mějme dánu šroubovici ***l*** a směr osvětlení ***s***. Sestrojujeme-li vržený stín šroubovice, proložíme každým bodem šroubovice světelný paprsek. Ty nám vyplní světelnou válcovou plochu Ω s řídící křivkou ***l***. Vržený stín do roviny ρ je pak řezem plochy Ω touto rovinou. Odvodili jsme si, že řez rovinou π kolmou k ose je prostá, prodloužená či zkrácená cykloida vzhledem k poloze bodu ***V´*** a kružnice ***k***. (Kružnice ***k*** je řez rotační válcové plochy Φ, na které leží šroubovice, rovinou π.) Vedeme-li řez světelné válcové plochy Ω obecnou rovinou ρ, víme, že řezy rovinou π a ρ jsou afinní, směr afinity je směr osvětlení. Vrženým stínem šroubovice ***l*** do obecné roviny ρ je tedy křivka afinní cykloidě, její tvar závisí na poloze bodu $\boldsymbol{V^k}$ vzhledem ke křivce $\boldsymbol{k^k}$. ($\boldsymbol{V^k}$ a $\boldsymbol{k^k}$ jsou afinní útvary k ***V´***, ***k***.)



Stejný postup využíváme pro konstrukci šroubovice s osou v obecné poloze v Mongeově promítání a při konstrukcích šroubovice v jiných projekcích. Směr osvětlení je shodný se směrem promítání, sestrojujeme vržený stín do průmětny. Na obrázku jsou sestrojené šroubovice v axonometrii pro různou redukovanou výšku závitu, jsou sestrojeny bodově, opět přibližně pokládáme $\boldsymbol{v_0=v/6}$, tj. pro otočení o 30°dostáváme posunutí rovno $\boldsymbol{v_0/2}$. Pro jeden bod je sestrojen tečna s využitím směrové kuželové plochy.


M
t´
$t_1´$
t
V´´
V
I_1
V´
M_1
t_1
(I_1)
(M_1)