

ROZVINUTELNÉ PLOCHY

Plocha tečen šroubovice

Rozvinutelná plocha je přímková plocha, pro kterou existuje izometrické zobrazení do roviny, tj. lze ji rozvinout do roviny. Dá se ukázat, že každá rozvinutelná plocha patří jednomu ze tří typů - válcová plocha s řídící křivkou k , kuželová plocha s vrcholem V a řídící křivkou k nebo plocha tečen prostorové křivky k .

Je-li plocha Φ plochou tečen prostorové křivky k , pak oskulační rovina v regulárním bodě křivky k je tečnou rovinou plochy Φ . Rovina, která není tečná, protíná Φ v křivce, která má na k bod vratu, k se proto nazývá **hrana vratu**. Tečná rovina se dotýká plochy podél celé přímky, množina všech tečných rovin je proto závislá jen na jednom parametru a tvoří jednoparametrickou soustavu rovin. Plocha Φ je tedy obálkou tečných rovin. Přímky rozvinutelné plochy jsou (jedinými) asymptotickými křivkami na ploše a protože tečná rovina se dotýká Φ podél celé přímky, jsou přímky plochy přímky **torzální**.

Pro konstrukci je někdy výhodnější zadat plochu jinak než jako plochu tečen prostorové křivky. Množina tečných rovin prostorové křivky je závislá na dvou parametrech, množina tečných rovin dotýkajících se současně dvou křivek je potom závislá na jednom parametru, tvoří jednoparametrickou soustavu rovin a tedy obaluje rozvinutelnou plochu Φ . Nechť jsou dány dvě křivky ${}^1k, {}^2k$. Z bodu P ležícího na křivce 1k promítneme křivku 2k kuželovou plochou Ω . Tečná rovina plochy Ω procházející tečnou 1t křivky 1k v bodě P se dotýká Ω podél přímky p , je také tečnou rovinou rozvinutelné plochy Φ a dotýká se jí podél přímky p . Jestliže křivky ${}^1k, {}^2k$ jsou rovinné, daná konstrukce se zjednoduší. V bodě 1T křivky 1k sestrojíme tečnu 1t , určíme její průsečík X s průsečnicí rovin křivek (pracujeme v rozšířeném eukleidovském prostoru) a bodem X vedeme tečnu 2t ke křivce 2k , která se křivky 2k dotýká v bodě 2T . Přímka $p = {}^1T{}^2T$ je pak přímkou rozvinutelné plochy a rovina $\tau = ({}^1t, {}^2t)$ tečnou rovinou. Takto vytvořené plochy nazýváme **přechodové plochy**.

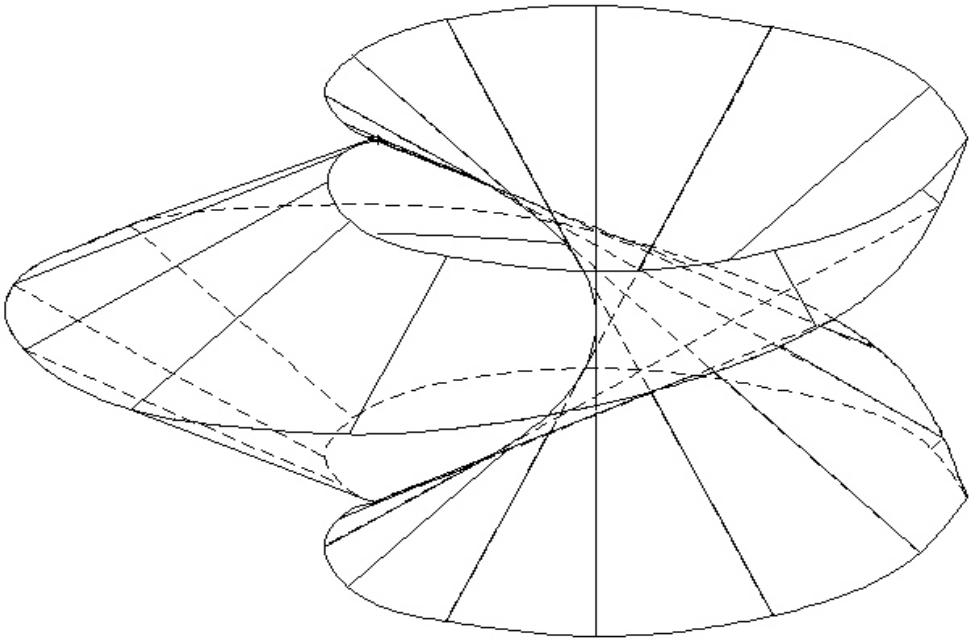
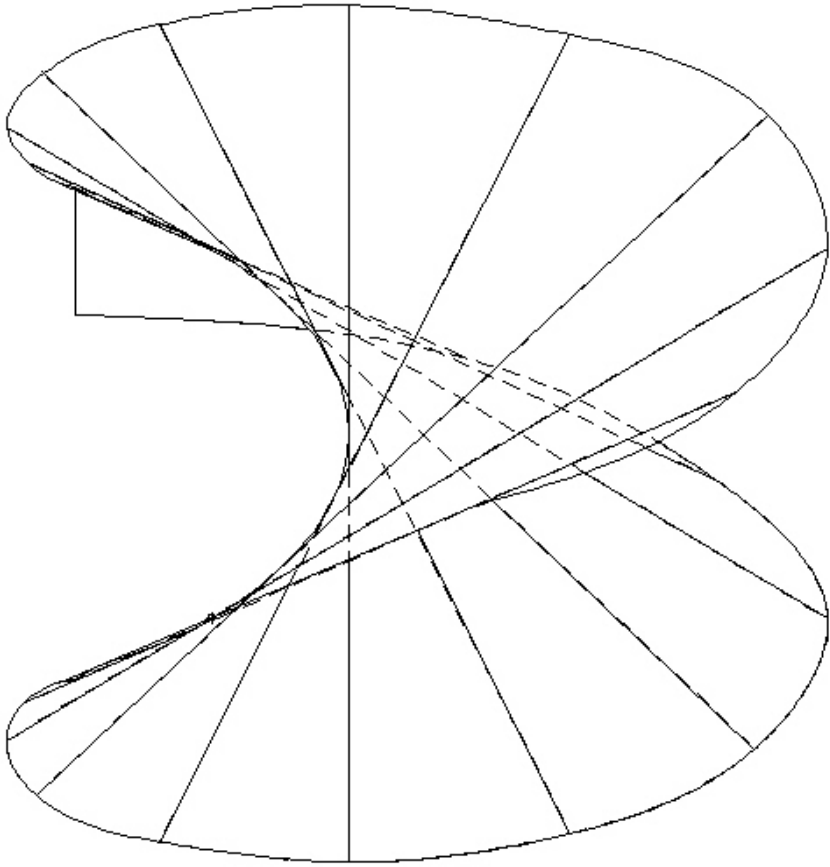
Je-li např. 2k nevlastní (je zadaná rotační kuželovou plochou, tzv. řídící kuželovou plochou, o vrcholu V a ose o), konstrukce bude následující. Zvolíme bod P na křivce 1k , v něm sestrojíme tečnu 1t a vedeme s ní rovnoběžnou přímku t' vrcholem V řídící kuželové plochy Ω . Sestrojíme tečnou rovinu plochy Ω , ta se dotýká podél přímky p' . Přímka p rovnoběžná s přímkou p' a procházející bodem P je přímkou rozvinutelné plochy. Protože řídící kuželová plocha je rotační, mají její povrchy konstantní odchylku od roviny kolmé k ose a tedy i všechny přímky rozvinutelné plochy mají stejnou odchylku od této roviny. Takto vytvořené plochy se pak nazývají **plochy konstantního spádu**.

Rozvinutelná šroubová plocha

Rozvinutelná šroubová plocha Φ je plochou tečen šroubovice h , která je její hranou vratu. Tečny šroubovice svírají konstantní úhel s rovinou kolmou k ose šroubovice, proto je Φ plocha konstantního spádu. Rovina kolmá k ose protíná tečny h v kruhové evolventě, přímky rovnoběžné s tečnami h vytvoří směrovou kuželovou plochu. Můžeme tedy plochu Φ dostat také jako plochu konstantního spádu nad kruhovou evolventou s řídící kuželovou plochou šroubovice h . Další možná definice rozvinutelné šroubové plochy je užitím šroubového pohybu. Šroubovému pohybu můžeme přidat evolventu, rovinu různoběžnou s osou o (ne kolmou) nebo tečnu šroubovice.

Závitem plochy nazveme množinu tečen jednoho závitů šroubovice h . Plocha má nekonečně mnoho závitů, které se vzájemně pronikají. Patří-li bod D dvěma závitům plochy, prochází jím dvě přímky plochy a je dvojnásobným bodem plochy. Šroubovým pohybem vytvoří **dvojnásobnou šroubovici** plochy, která má tutéž orientaci a tutéž výšku závitů jako hrana vratu. Na ploše leží nekonečně mnoho dvojnásobných šroubovic. Na obrázku je v axonometrii zobrazen jeden závit rozvinutelné šroubové plochy omezené dvěma rovnoběžnými rovinami, které plochu protínají v

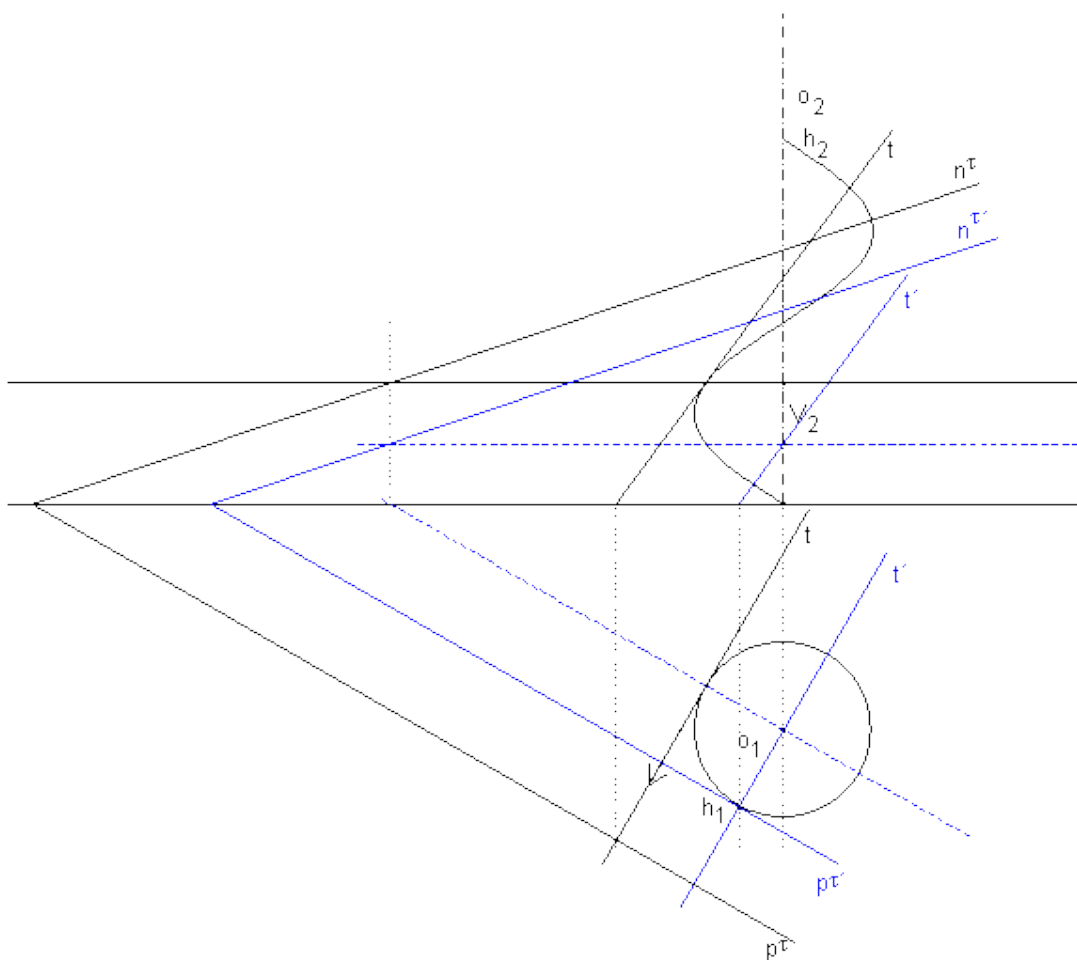
kruhových evolventách. Další obrázek zobrazuje plochu rovněž v axonometrii, tentokrát omezenou dvojnásobnou šroubovicí a dvěma rovnoběžnými rovinami.



Konstrukce hrany vratu

V Mongeově projekci je dán levotočivý šroubový pohyb osou o kolmou k půdorysně a v_o . Určete hranu vratu h rozvinutelné šroubové plochy Φ , kterou při daném šroubovém pohybu obalí rovina τ .

Rovina τ je oskulační rovinou křivky h , rovina τ' rovnoběžná s τ a jdoucí V se dotýká směrové kuželové plochy Ω podél přímky t' . Ω protne půdorysnu v půdoryse hrany vratu. τ se dotýká plochy Φ podél přímky t rovnoběžné s t' . Půdorys t_1 se dotýká h_1 , musíme dbát na to, aby h i t měly stejné klesání.



Řez rozvinutelné šroubové plochy

Pravotočivá rozvinutelná šroubová plocha je zadána v Mongeově projekci osou a redukovanou výškou závitu, osa je kolmá k π , plocha je omezena rovnoběžnými rovinami π , π' (ve výšce jednoho závitu) Řez rovinou ρ sestrojujeme bodově jako množinu průsečíků přímek plochy s rovinou řezu.

1. Konstrukce obecného bodu řezu. Zvolíme přímku q plochy a sestrojíme tečnou rovinu τ podél této přímky. τ je určena přímkou q a například tečnou evolventy e procházející půdorysným

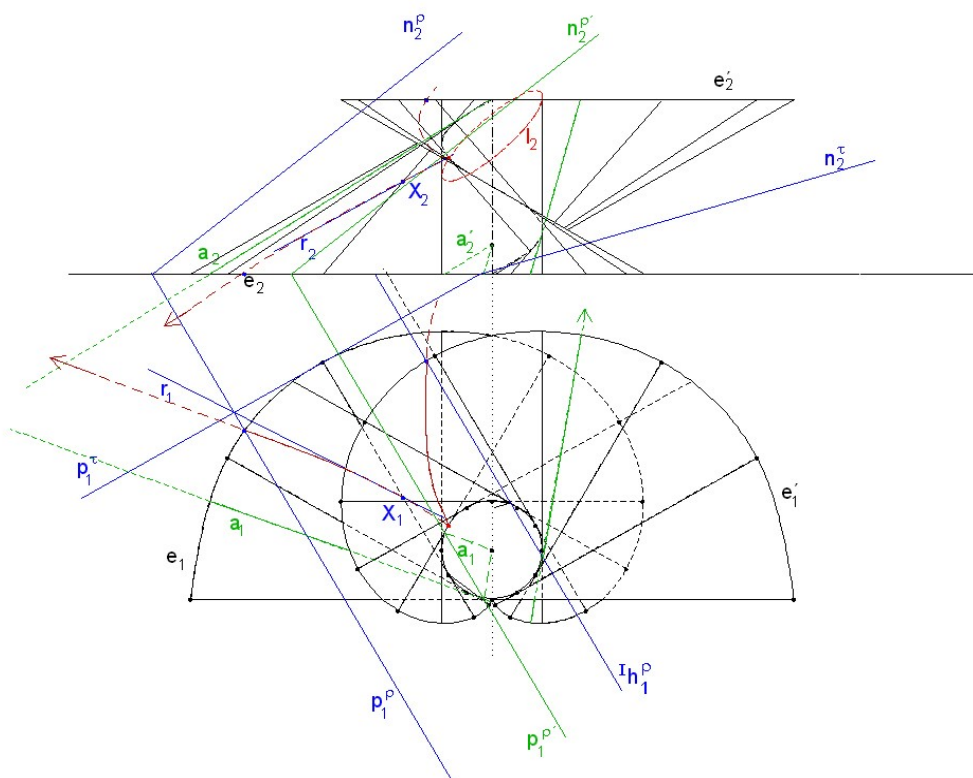
stopníkem přímky q . Evolventa e leží v půdorysně, proto je její tečna půdorysnou stopou roviny τ . Sestrojíme průsečnici r rovin τ a ρ . Společný bod X přímek r a q je obecný bod řezu, přímka r je tečnou křivky g řezu v bodě X .

2. Konstrukce bodů řezu na evolventách e, e' . Evolventy e, e' leží v rovnoběžných rovinách, rovina π protne rovinu ρ v půdorysné stopě roviny ρ a rovina π' v hlavní přímce první osnovy. Na evolventě e patří řezu průsečíky s půdorysnou stopou roviny ρ , na evolventě e' jsou to průsečíky s hlavní přímkou první osnovy roviny ρ ležící v rovině π' .

3. Konstrukce bodů řezu na hraně vratu. Hrana vratu h leží na rotační válcové ploše Ω' . Sestrojíme řez Ω' rovinou ρ . Řezem je elipsa l , společné body l a h patří řezu. Tyto body jsou body vratu křivky g řezu.

4. Konstrukce dvojnásobných bodů. Pokud je plocha Φ omezená dvojnásobnou šroubovicí, konstrukce dvojnásobných bodů je stejná, jako konstrukce bodů na hraně vratu.

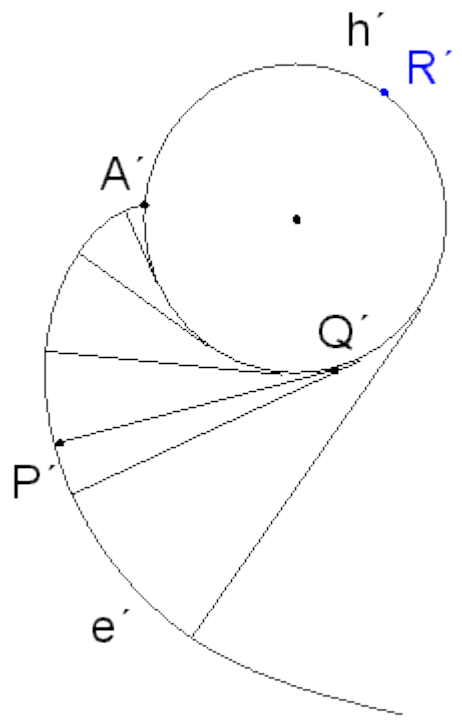
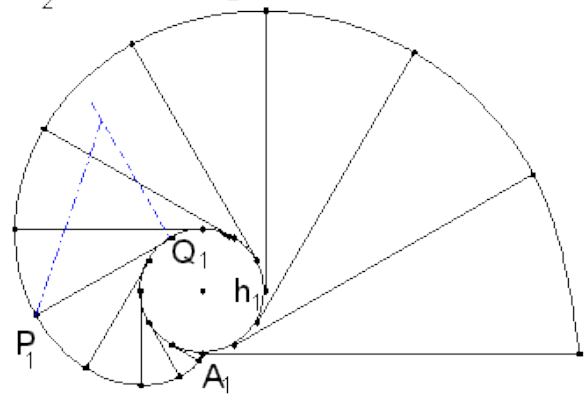
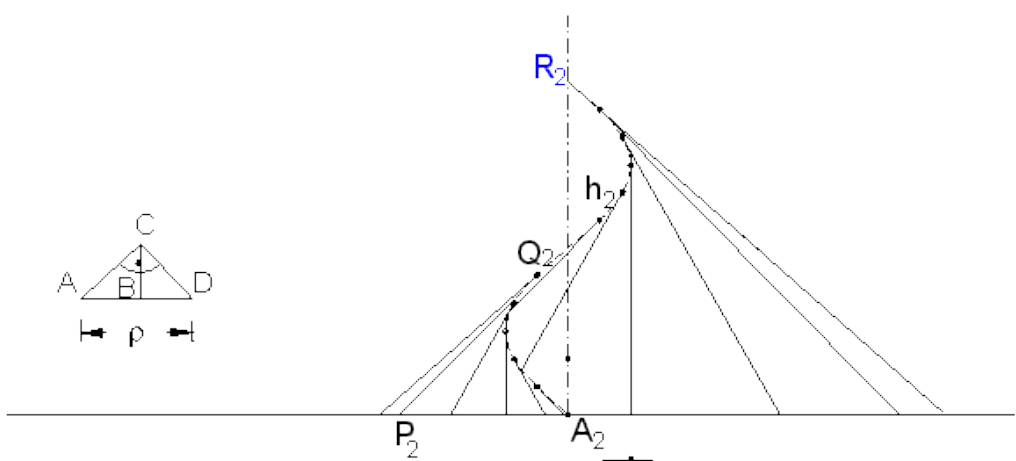
5. Konstrukce asymptot křivky řezu. Asymptoty jsou tečny v nevlastních bodech plochy. Z konstrukce obecného bodu víme, že tečna řezu je průsečnice roviny řezu s tečnou rovinou a bod řezu je průsečík přímky plochy a roviny řezu. Tzn. hledáme přímku plochy, která je rovnoběžná s rovinou ρ , ta protne ρ v nevlastním bodě a tečná rovina α podél této přímky protne rovinu ρ v asymptotě řezu. Sestrojíme tedy rovinu ρ' rovnoběžnou s rovinou ρ a procházející vrcholem V směřové kuželové plochy Ω . Vzájemná poloha ρ' a Ω určí počet asymptot řezu. Pokud ρ' protne Ω aspoň v jedné přímce a' , asymptota existuje a je to přímka a plochy, rovnoběžná s přímkou a' .



Komplanace rozvinutelné šroubové plochy

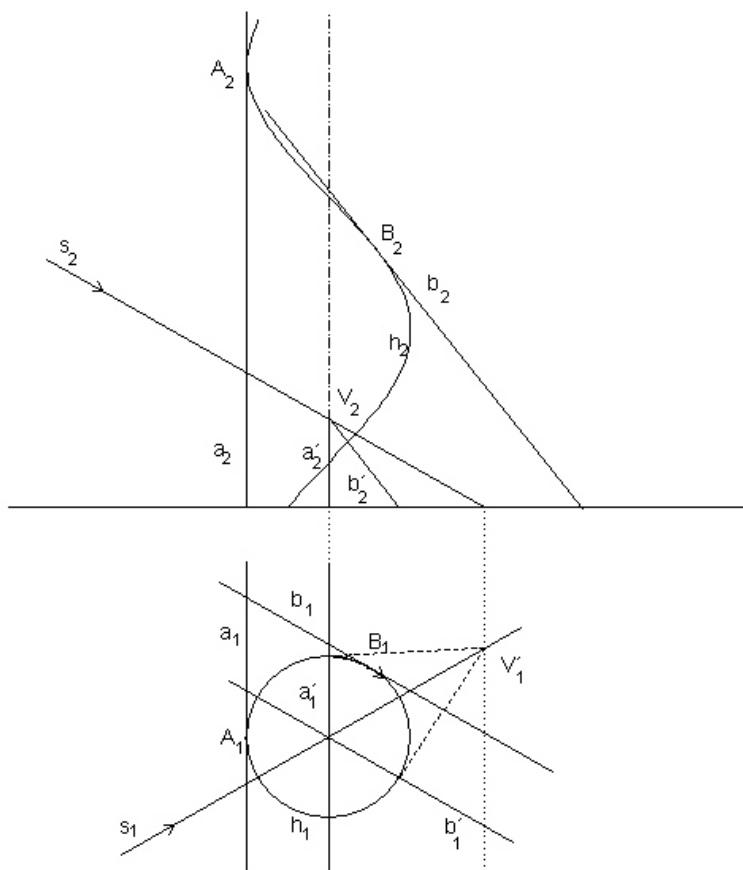
Mějme dānu rozvinutelnou šroubovou plochu levotočivou šroubovicí h prochāzející bodem A ležícím v půdorysně. Víme, že šroubovice je prostorovā křivka konstantní křivosti. Rozvinujeme-li plochu do roviny, hledāme izometrické zobrazení plochy do roviny a tedy i každā křivka plochy se zobrazí na rovinnou křivku tĭmto izometrickým zobrazením. To znamená, že hrana vratu h se rozvine

do rovinné křivky konstantní křivosti, tj. do kružnice h' , jejíž křivost je stejná jako křivost šroubovice h . Protože se zachovává incidence, tečny šroubovice h se rozvinou do tečen kružnice h' . Poloměr kružnice h' získáme ze základního trojúhelníku. Sestrojíme základní trojúhelník šroubovice h (odvěsny mají délky r a v_0). Označme např. $r=|ABI|$, $v_0=|BCI|$, z vrcholu C sestrojíme kolmici k přeponě, ta protne přímkou AB v bodě D . Z Eukleidovy věty o odvěsně získáme velikost úsečky AD , $|AD|=(r^2+v_0^2)/r$, což je převrácená hodnota křivosti šroubovice, tj. velikost úsečky AD je rovna poloměru ρ křivosti šroubovice h a tedy i poloměru kružnice h' . Necht' Q je bod šroubovice h , pak oblouk AQ na kružnici h se musí rozvinout do stejně velkého oblouku $A'Q'$ kružnice h' . Označme q tečnu šroubovice h v bodě Q a P její půdorysný stopník, Q_1 pravouhlý průmět bodu Q do půdorysny. Trojúhelník QQ_1P je podobný základnímu trojúhelníku, odtud $|PQ|=\rho$, tj. $|PQ|=\rho$, což je také velikost oblouku $A'Q'$ kružnice h' , takže Q' leží na evolventě e' kružnice h' a evolventa e přejde rozvinutím do evolventy e' . (Velikost úsečky $|PQ|$ získáme například sklopením.) Jeden závit šroubovice se rozvine jen do části kružnice h' .

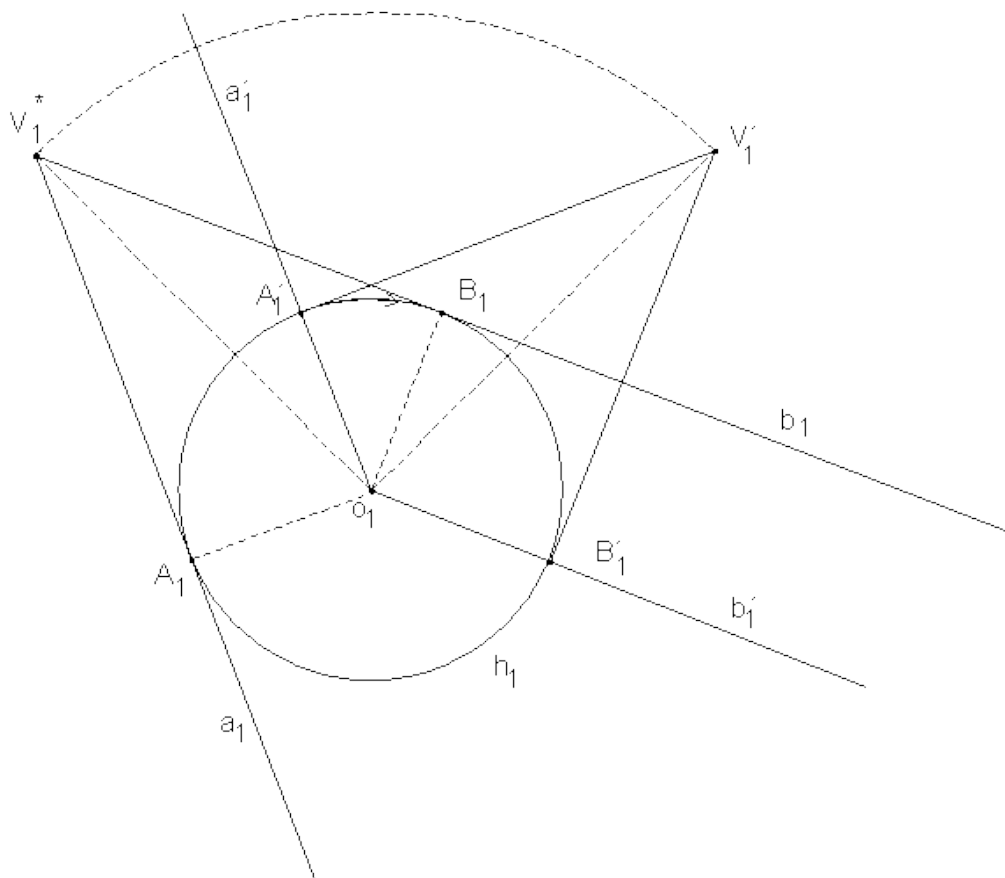


Rovnoběžné osvětlení plochy tečen šroubovice

Rovnoběžné osvětlení bude určeno přímkou s procházející vrcholem V směřové kuželové plochy Ω zadané levotočivé šroubovice h . Pomocí vrženého stínu V' vrcholu V do π sestrojíme mez vlastního stínu směřové kuželové plochy. (Tato mez je tvořena dvěma přímkami nebo jednou přímkou nebo neexistuje, podle toho, zda V' leží vně, na nebo uvnitř h_1 .) Existuje-li mez vlastního stínu plochy Ω a je tvořena např. přímkami a', b' , pak přímky a, b rozvinutelné šroubové plochy Φ , které jsou rovnoběžné s přímkami a', b' tvoří mez vlastního stínu plochy Φ . Půdorysy a_1, b_1 jsou tečnami kružnice h_1 a jejich klesání v bodech dotyku A, B je stejné jako klesání šroubovice. Podle polohy V' vzhledem k h_1 existují na každém závitu plochy dvě, jedna nebo žádná přímka meze vlastního stínu.

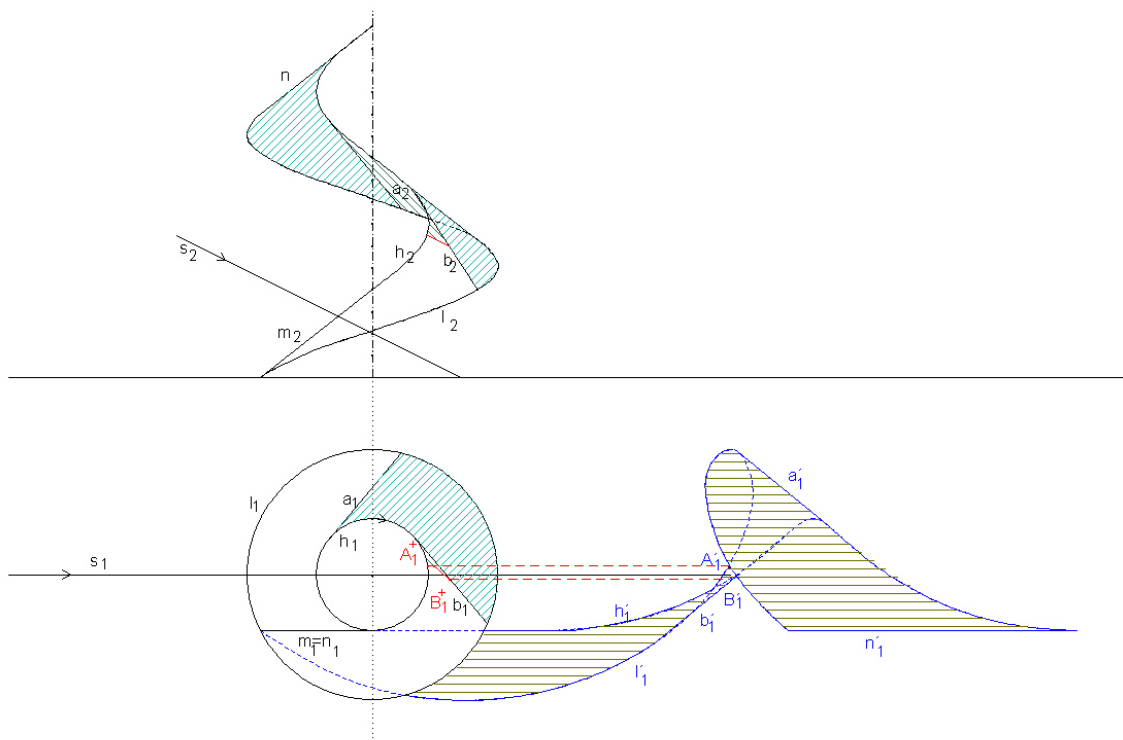


Označme A', B' body dotyku tečen vedených z V' k h_1 . Otočme vše kolem o_1 o 90° proti směru šipky udávající klesání. Otočením přejde A' do A, B' do B_1 a bod V' do průsečíku V_1' přímek a_1, b_1 . Z toho vyplývá zjednodušení konstrukce půdorysu přímek meze vlastního stínu.



Sestrojíme rovnoběžné osvětlení jednoho závitu části pravotočivé rozvinutelné šroubové plochy Φ . Plocha je zadána šroubovicí h vratu omezenou body M, N a částí tečny m v bodě M , plochu tvoří úsečka PM , kde P je půdorysný stopník tečny v bodě M . Přímka s směru osvětlení prochází vrcholem směrové kuželové plochy, je rovnoběžná s nárysnou a vržený stín V' bodu V leží v mezikruží určeném kružnicemi h_1 a l_1 , kde l_1 je šroubovice bodu P .

Nejprve sestrojíme mez vlastního stínu plochy Φ , tvořenou úsečkami a, b . Sestrojíme vržené stíny do π . K mezi vrženého stínu v π patří vržené stíny a', b' úseček a, b , dále h' a l' šroubovic h a l sestojené podle předchozího (h' je zkrácená a l' prodloužená cykloida) a vržené stíny tečen m, n šroubovice h v bodech M, N . Pomocí vrženého stínu do π ještě sestrojíme zpětnými paprsky vržený stín plochy Φ na sebe, oblouk šroubovice l omezený body A, B vrhá stín l^* na plochu Φ , jeho koncové body A^*, B^* určíme pomocí průsečíků A', B' křivky l' s křivkou h' a úsečkou b' . Další body vržené stínu plochy na sebe určíme zpětnými paprsky pomocí průsečíků vržených stínů úseček plochy s křivkou l' .



Plochy konstantního spádu a přechodové plochy

V technické praxi se z obecných rozvinutelných ploch nejvíce využívají plochy konstantního spádu a přechodové plochy. Plochy konstantního spádu se nejvíce využívají ve stavební praxi například při terénních úpravách jako výkopové či násypové plochy. Křivka k je hrana komunikace, řídicí rotační kuželová plocha má svislou osu. Jestliže máme dvě rovinné křivky, z nichž každá leží v jiné rovině a hledáme rozvinutelnou plochu, která je jimi určena, sestrojíme přechodovou plochu. Jak jsme ukázali, je plochou konstantního spádu i plocha tečen šroubovice. (Plocha konstantního spádu nad kruhovou evolventou.) Další často využívané plochy konstantního spádu jsou plochy sestrojené nad regulární kuželosečkou. Ukážeme konstrukci a některé vlastnosti plochy konstantního spádu nad elipsou.

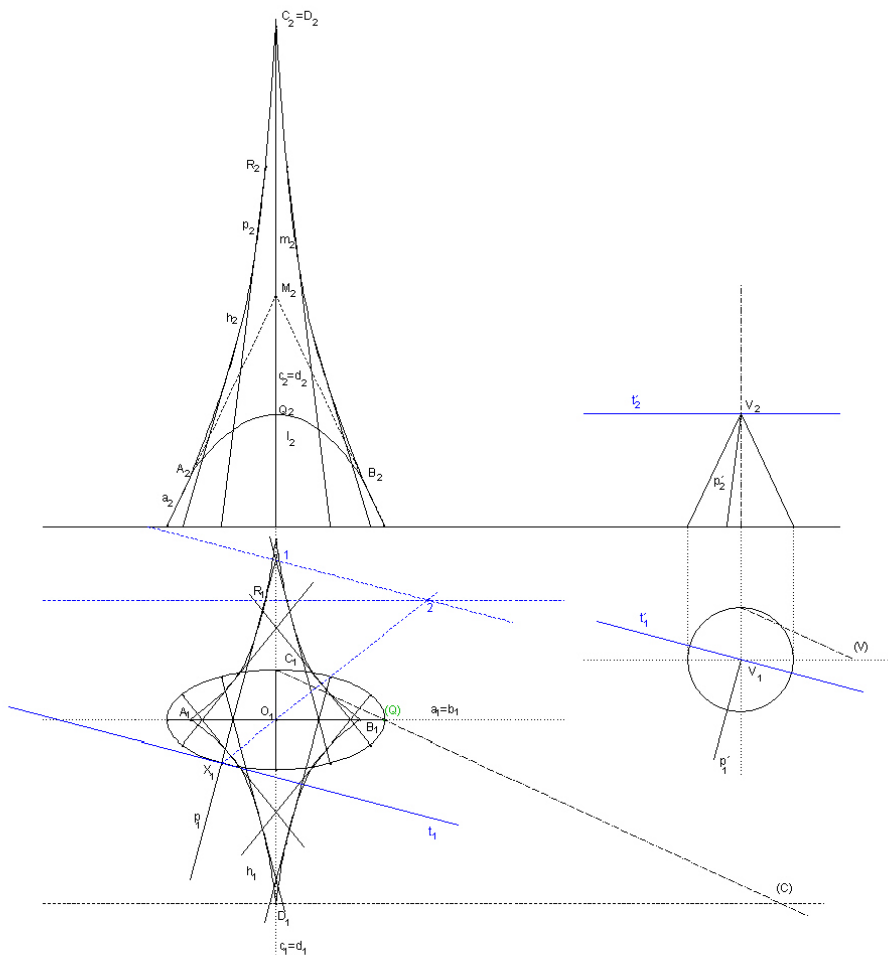
Plocha konstantního spádu nad elipsou

Plochu Φ zadáme v Mongeově projekci elipsou e ležící v půdorysně π a řídicí rotační kuželovou plochou Ω s osou kolmou k π . Hlavní osa elipsy e je rovnoběžná s nárysou, řídicí kružnice k plochy Ω leží v π . Podle předchozího sestrojíme tvořící přímky plochy. Zvolíme bod X elipsy e , v něm sestrojíme tečnu t k e , sestrojíme přímku t' rovnoběžnou s t procházející vrcholem V plochy Ω . Přímku t' proložíme tečnou rovinou τ plochy Ω , ta se jí dotýká podél přímky p' , přímka p rovnoběžná s p' vedená bodem X je tvořící přímkou plochy Φ . Přímku t' prochází dvě tečné roviny plochy Ω ,

bodem X tedy prochází dvě tvořící přímky, tj. elipsa e je dvojnásobnou křivkou plochy Φ . Budeme sestrojovat jen část plochy Φ ležící nad π .

Půdorysy tvořících přímek jsou normály tečen elipsy e , tj. obalí evolutu elipsy. Jak víme, lze rozvinutelnou plochu sestrojít jako plochu tečen prostorové křivky h , půdorysy těchto tečen jsou pak tečny půdorysu křivky h , proto h_1 je evoluta elipsy e . Evoluta rovinné křivky je množina jejích středů křivosti, vrcholům křivky (evolventy) odpovídají body vratu evoluty. Půdorys h má čtyři body vratu A_1, B_1, C_1, D_1 - středy hyperoskulačních kružnic elipsy e . Protože tvořící přímky a, b, c, d ve vrcholech elipsy nepatří směru promítání, jsou body vratu křivky h_1 půdorysy bodů vratu A, B, C, D křivky h . Tvořící přímky a, b jsou rovnoběžné s nárysnou, plocha je souměrná podle roviny $\mu=(a, b)$ přímky c, d jsou kolmé k x . Nárysy bodů C, D určíme sklopením promítací roviny σ přímek c, d , plocha je souměrná také podle roviny σ . Průsečnice o rovin μ a σ je osou plochy. Přímky plochy souměrné podle μ se protínají v bodech elipsy l , jejíž jeden vrchol je průsečík Q přímek c, d . Podobně přímky plochy souměrné podle σ se protínají v bodech hyperboly m , jejíž vrchol M je průsečíkem přímek a, b . Části křivek l a h tvořené průsečíky tvořících přímek jsou dvojnásobnými křivkami plochy.

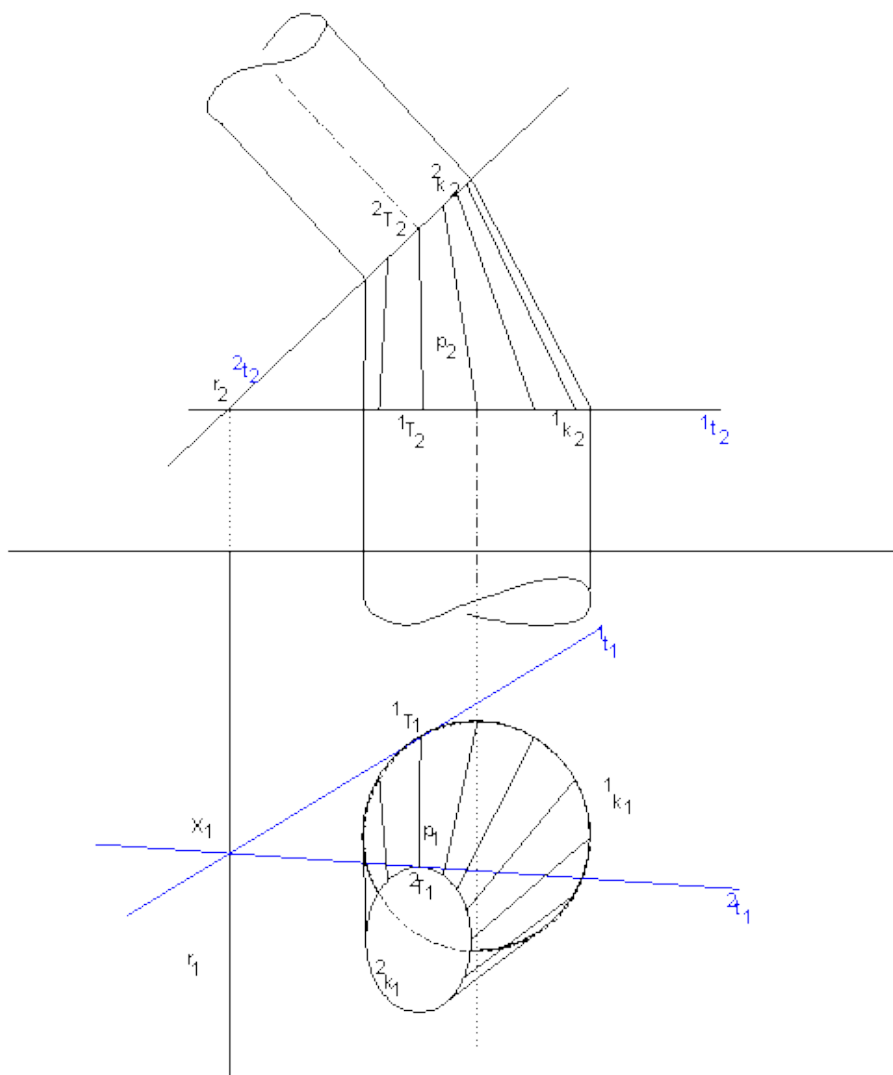
Konstrukce bodů křivky h_1 - pro bod X_1 máme sestrojeno p_1 a hledáme střed křivosti R_1 elipsy e_1 ležící na p_1 . Určíme průsečík (ozn. ho 1) přímky p_1 s vedlejší osou elipsy e . Bodem 1 vedeme rovnoběžku s tečnou t a určíme její průsečík (ozn. ho 2) s přímkou X_1O_1 (O_1 je střed elipsy e_1), bodem 2 vedeme rovnoběžku s hlavní osou elipsy e_1 . Průsečík této rovnoběžky s přímkou p_1 je střed R_1 křivosti. R_2 leží na p_2 , přímka p_2 se dotýká v R_2 nárysu h_2 hrany vratu h .



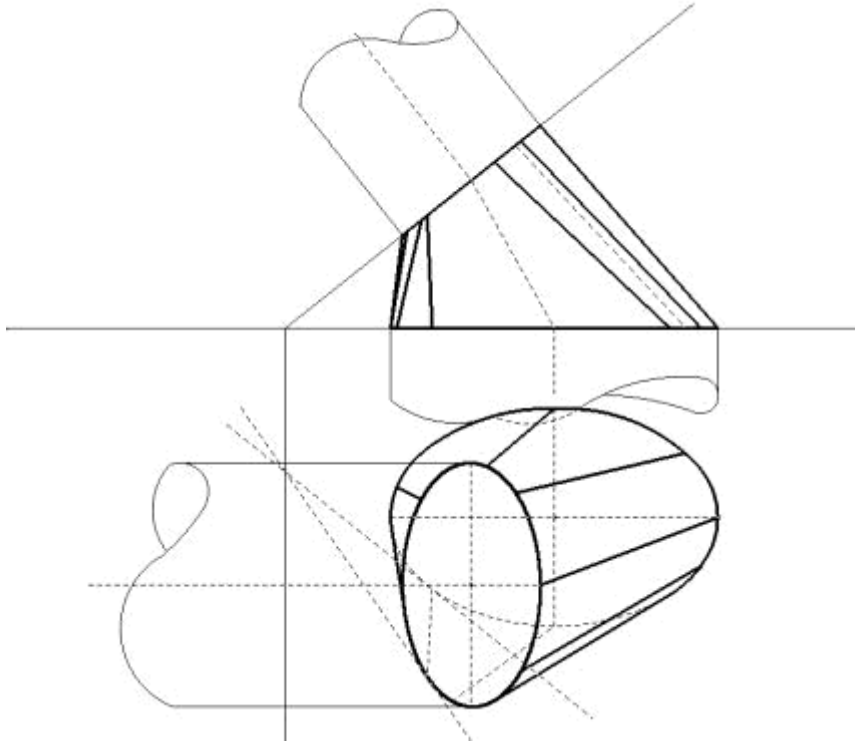
Přechodová plocha mezi dvěma válcovými potrubími

Nejčastějším případem je sestavení přechodové plochy mezi dvěma danými potrubími. Křivky, které určují tuto plochu jsou dvě kružnice nebo dvě elipsy, ležící v různých rovinách (různoběžných či rovnoběžných).

Mějme dānu rotační vālcovou plochu s osou kolmou k π a rotační vālcovou plochu s osou rovnoběžnou s v . Zobrazíme čāsti rotačních ploch omezené kružnicemi 1k , 2k ležícími v rovinách kolmých k v , roviny se protínají v přímce r . Sestrojíme čāst rozvinutelné plochy ležící "mezi" kružnicemi 1k , 2k . Na 1k zvolíme bod 1T , v něm určíme tečnu 1t k 1k a určíme její průsečík X s přímkou r . Z bodu X vedeme tečnu $2t$ ke kružnici 2k , dotýká se v bodě 2T . Přímka $p=^1T^2T$ je tvořící přímkou přechodové plochy Φ , budeme uvažovat jen úsečku $^1T^2T$. Z bodu X lze vést ještě tečnu $^2t'$, která určí další přímku p' , spojitým pohybem přímek p a p' vznikají dva plāště plochy Φ , uvažujeme jen jeden, vytvořený přímkou p . Je-li 1t rovnoběžná a r , pak i 2t je rovnoběžná s r , pomocí takovéto přímky dostaneme tvořící přímky plochy patřící druhému obrysu. Pūdorysy tvořících přímek patřících prvnímu obrysu jsou společné tečny křivek 1k_1 , 2k_1 .



Řídící křivky nemusí být kružnice, na obrázku je přechodová plocha mezi dvěma potrubími s eliptickým profilem.



Řídící křivky mohou také ležet v rovinách rovnoběžných (průsečnice je pak nevlastní přímka). V tomto případě jsou vždy přímky 1t a 2t rovnoběžné. Křivky 1k , 2k nemusí být vždy hladké, sestrojíme přechodovou plochu mezi kvádrem se čtvercovou podstavou 1k a rotačním válcem omezeným kružnicí 2k . Kvádr a válec mají společnou osou kolmou k π . Roviny křivek 1k a 2k jsou rovnoběžné, tečny 1t a 2t budou také navzájem rovnoběžné. Za tečny čtverce 1k považujeme buď přímky, na nichž leží strany čtverce, nebo přímky procházející vrcholy. Položme ${}^1t=AB$, všechny body úsečky AB jsou body dotyku tečny 1t s 1k . Ke 2k existuje tečna v jednom bodě Q rovnoběžná s 1t . Ploše Φ tedy patří trojúhelník ABQ . Podobně pro další strany ploše patří také trojúhelníky BCR , CDM , ADN . Ke každé tečně 2t oblouku QR kružnice 2k existuje přímka 1t s ní rovnoběžná procházející vrcholem B čtverce 1k , bod dotyku tečny 1t je B . Ploše také patří část rotačního kužele s osou kolmou k π , vrcholem B omezeného kratším obloukem QR kružnice 2k . Stejně pro ostatní vrcholy. Tato plocha se používá jako přechodová plocha v násypce.

