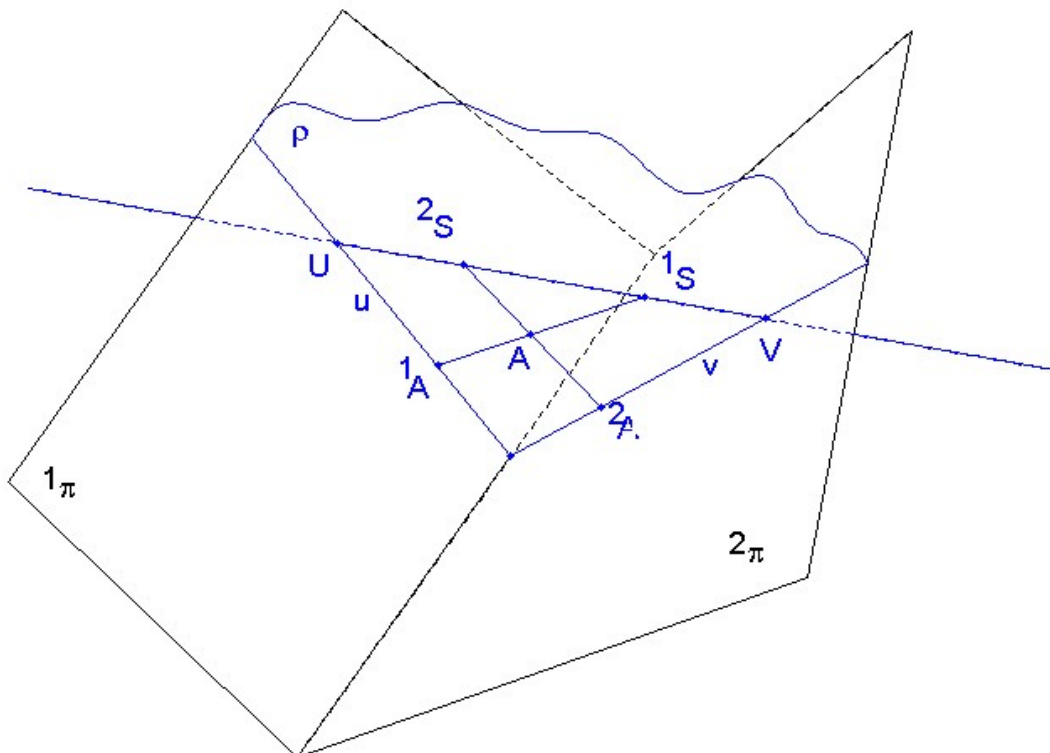


# ZÁKLADNÍ ZOBRAZOVACÍ METODY

Prostorové útvary zobrazujeme do roviny pomocí promítání, což je jisté zobrazení trojrozměrného prostoru (uvažujeme rozšířený Eukleidovský prostor) do roviny, které je zadáno středem promítání a průmětnou. Každému bodu prostoru tak přiřadíme průsečík jeho spojnice se středem promítání s průmětnou. Ovšem pro bod průmětny jednoznačně neurčíme bod v prostoru jehož je průmětem. Abychom to mohli určit používáme většinou kombinaci více promítání a tuto kombinaci několika promítání nazýváme **zobrazovací metoda**. (Většinou se však v názvu metody objeví pojem promítání, např. Mongeovo promítání, je tím však myšlena zobrazovací metoda.) Promítání je lineární zobrazení, tj. průmětem přímky je přímka, nazývá se někdy také zobrazovací metoda složena z několika promítání **lineární zobrazovací metoda**.

Mějme v rozšířeném Eukleidovském prostoru dána dvě středová promítání  ${}^1S({}^1S, {}^1\pi)$ ,  ${}^2S({}^2S, {}^2\pi)$  zadané různými středy  ${}^1S, {}^2S$ , které neleží v žádné z průměten  ${}^1\pi, {}^2\pi$ , průmětny jsou v obecné poloze. Přímku  $s = {}^1S{}^2S$  nazýváme **osa** dvojice  ${}^1S, {}^2S$ . Označme  $U, V$  průsečíky přímky  $s$  po řadě s rovinami  ${}^1\pi, {}^2\pi$ . Body  $U, V$  se nazývají **uzlové body**. Každá přímka u roviny  ${}^1\pi$  procházející bodem  $U$  a každá přímka v rovinu  ${}^2\pi$  procházející bodem  $V$  se nazývá **uzlová přímka**. Libovolná rovina  $\rho$  procházející osou protíná roviny  ${}^1\pi, {}^2\pi$  v uzlových přímkách, které se protínají na průsečnici  $x$  rovin  ${}^1\pi, {}^2\pi$ . Takové přímky nazýváme **sdružené uzlové přímky**.

**Věta:** Necht'  ${}^1S({}^1S, {}^1\pi)$ ,  ${}^2S({}^2S, {}^2\pi)$ , kde  ${}^1S \neq {}^2S$  jsou středová promítání. Průměty  ${}^1A, {}^2A$  bodu  $A$  neležícího na ose  $s$  v promítáních  ${}^1S, {}^2S$  leží na sdružených uzlových přímkách  $u, v$  rovin  ${}^1\pi, {}^2\pi$  a jsou různé od uzlových bodů  $U, V$ . Naopak, leží-li body  ${}^1A$  roviny  ${}^1\pi, {}^2A$  roviny  ${}^2\pi$  na sdružených uzlových přímkách a jsou různé od uzlových bodů, pak existuje jediný bod  $A$  rozšířeného Eukleidovského prostoru takový, že body  ${}^1A, {}^2A$  jsou jeho průměty v promítáních  ${}^1S({}^1S, {}^1\pi)$ ,  ${}^2S({}^2S, {}^2\pi)$ .



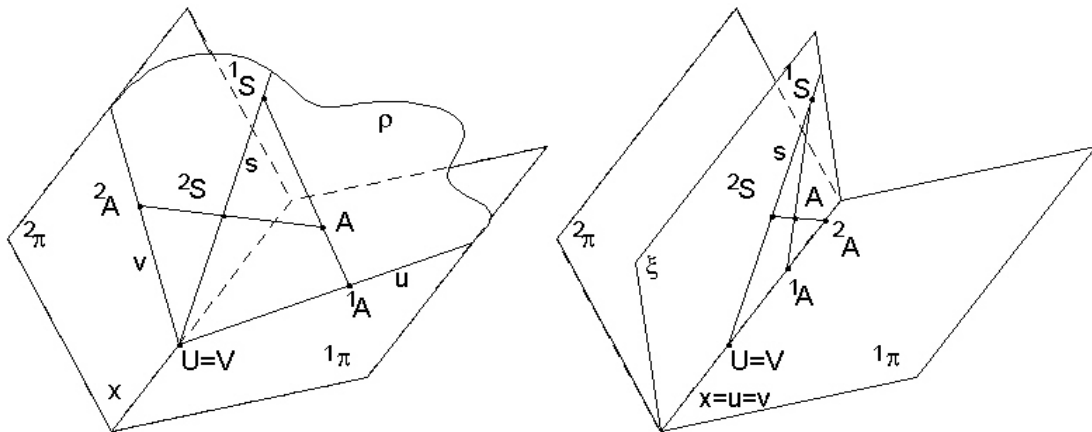
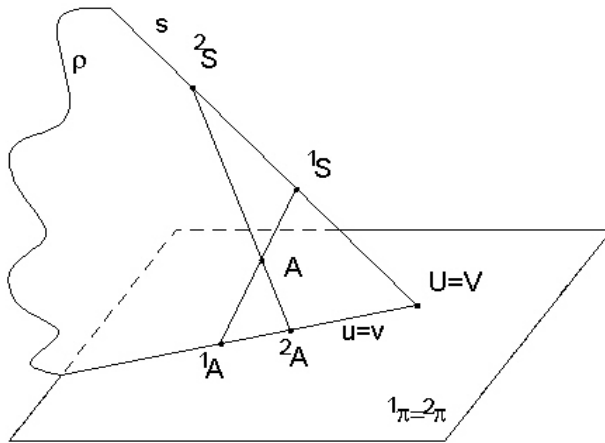
**Důkaz:** Necht' bod  $A$  rozšířeného Eukleidovského prostoru neleží na ose  $s$ . Pak je bodem  $A$  a přímkou  $s$  určena rovina  $\rho$  různá od průměten  ${}^1\pi, {}^2\pi$ . Rovina  $\rho$  protíná roviny  ${}^1\pi, {}^2\pi$  ve sdružených

uzlových přímkách. Protože bod  $A$  neleží na ose  $s$ , jsou přímky  $^1SA$  a  $^2SA$  různé a středové průměty  $^1A = ^1SA \cap ^1\pi$ ,  $^2A = ^2SA \cap ^2\pi$  bodu  $A$  leží na přímkách  $u, v$  a jsou různé od bodů  $U, V$ .

Nechť naopak body  $^1A, ^2A$  leží na sdružených uzlových přímkách  $u, v$  a jsou různé od bodů  $U, V$ . Přímky  $u, v, s$  leží v rovině  $\rho$  (definice sdružených uzlových přímek), přímky  $^1S^1A, ^2S^2A$  také leží v  $\rho$  a jsou navzájem různé a různé od  $s$ , protínají se tedy v bodě  $A$ . Body  $^1A, ^2A$  jsou průměty bodu  $A$  v promítáních  $^1S(^1S, ^1\pi), ^2S(^2S, ^2\pi)$ .

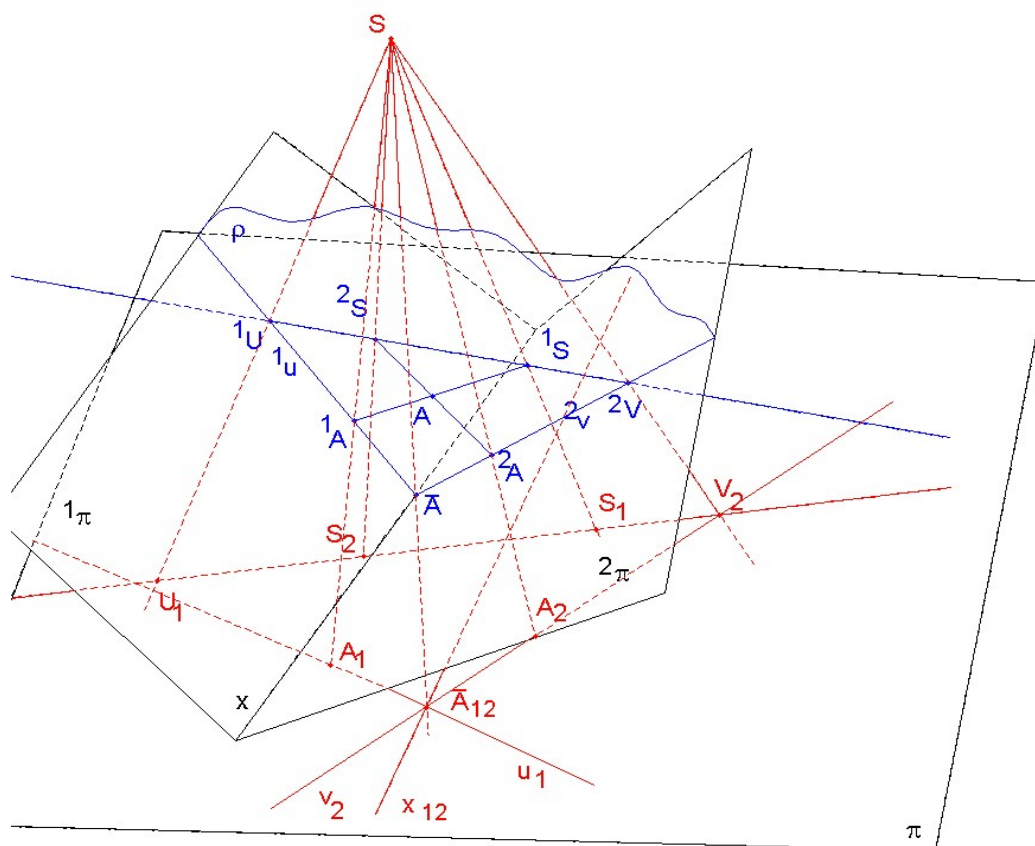
Jestliže bod  $A$  leží na ose  $s$  a je různý od středů promítání  $^1S, ^2S$ , pak  $^1A = U$  a  $^2A = V$ , ale obráceně z průmětů  $^1A, ^2A$  neurčíme bod  $A$  v prostoru. Pokud  $A = ^1S$ , pak není  $^1A$  definováno, stejně pro  $A = ^2S$ .

Může nastat případ, že  $^1\pi = ^2\pi$ , pak  $U = V$  a také splývají sdružené uzlové přímky. Pokud jsou roviny  $^1\pi, ^2\pi$  různé a přímka  $s$  a průsečnice  $x$  rovin  $^1\pi$  a  $^2\pi$  jsou různoběžné, splývají uzlové body  $U, V$  s průsečíkem přímek  $s, x$ . V tomto případě, neleží-li bod  $A$  v rovině  $\xi = (s, x)$ , jsou sdružené uzlové přímky  $u, v$  různé. Leží-li bod  $A$  v rovině  $\xi$  a neleží na ose, uzlové přímky  $u, v$  splývají s přímkou  $x$ .



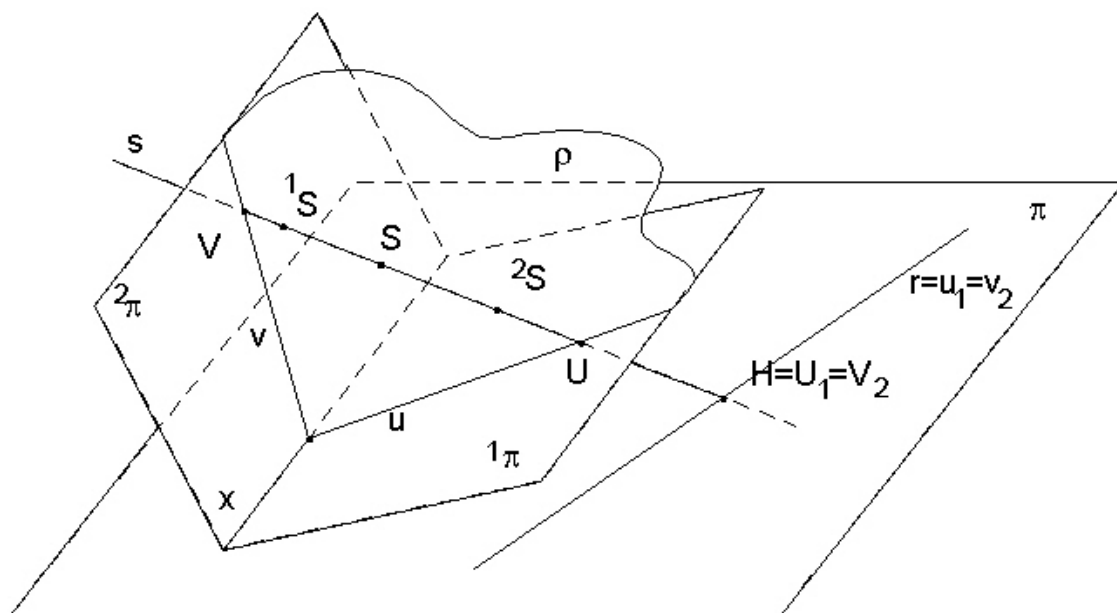
V promítáních  $^1S(^1S, ^1\pi), ^2S(^2S, ^2\pi)$  promítáme většinou do různých rovin, v deskriptivní geometrii potřebujeme zobrazovat trojrozměrné útvary do jedné roviny. Proto zavádíme další středové promítání  $S(S, \pi)$  takové, že  $S$  neleží v žádné z rovin  $^1\pi, ^2\pi$  a body rovin  $^1\pi, ^2\pi$  promítneme z  $S$  do  $\pi$ . Trojici  $S(S, \pi), ^1S(^1S, ^1\pi), ^2S(^2S, ^2\pi)$  středových promítání nazýváme **základní zobrazovací metoda**. Promítání  $^1S, ^2S$  se nazývají **pomocná**, promítání  $S$  je **hlavní**. Průměty útvarů z  $^1\pi$  budeme označovat indexem  $1$  vpravo dole, stejně pro  $^2\pi$ . Body  $U_1, V_2$  se nazývají **uzlové body průmětny  $\pi$** , uspořádaná dvojice  $(A_1, A_2)$  se nazývá **obrazem bodu  $A$**  v základní zobrazovací metodě. Jestliže jsou roviny  $^1\pi, ^2\pi$

různé, pak průmět  $x_{12}$  jejich průsečnice  $x$  se nazývá **základnice**. Průměty uzlových přímek se nazývají **ordinály**, průměty sdružených uzlových přímek se nazývají **sdružené ordinály**, ordinály procházejí body  $U_1, V_2$ .

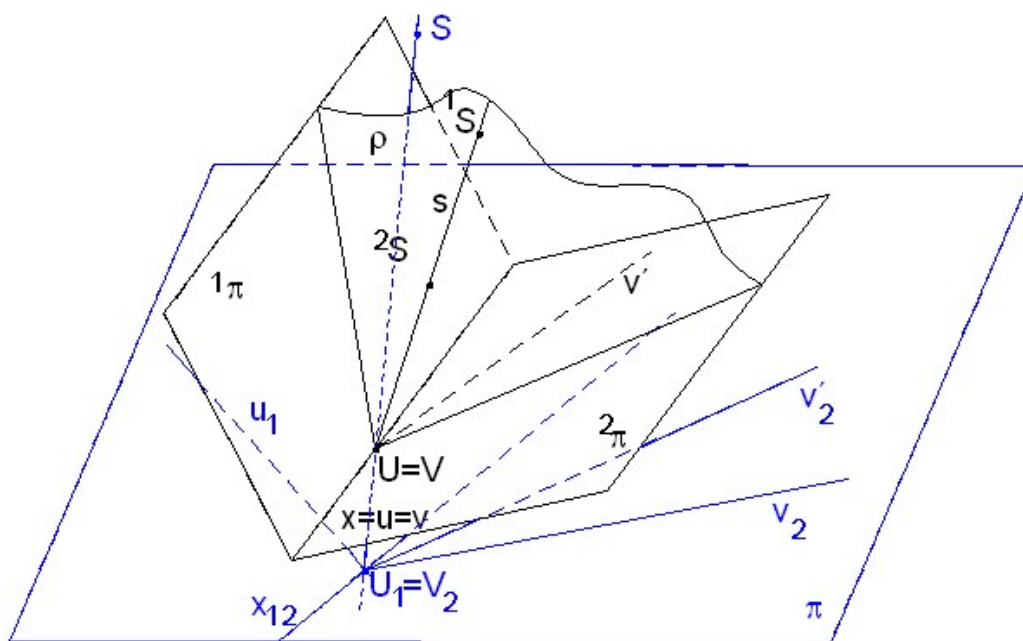


Všimněme si některých speciálních případů základní zobrazovací metody. Předpokládejme, že roviny  $^1\pi, ^2\pi$  jsou různé, osa  $s$  neprotíná průsečnici  $x$  rovin  $^1\pi, ^2\pi$  a střed  $S$  hlavního promítání neleží na ose  $s$ . Pak uzlové body  $U_1, V_2$  průmětny jsou různé a žádný neleží na základnici  $x_{12}$ . Sdružené uzlové přímky se protínají na přímce  $x$ , jim odpovídající sdružené ordinály  $u_1, v_2$  se protínají na základnici a prochází uzlovými body průmětny. Obráceně, máme-li libovolné sdružené ordinály  $u_1, v_2$  procházející uzlovými body průmětny a protínající se na základnici v bodě  $\bar{A}_{12}$ , označme  $\bar{A}$  průsečík přímky  $S\bar{A}_{12}$  s přímkou  $x$ . Přímky  $s, x$  jsou mimoběžné a tedy  $\bar{A}$  neleží na  $s$ , body  $U, V, A$  určují rovinu  $\rho$ . Přímky  $u=U\bar{A}, v=V\bar{A}$  jsou sdružené uzlové přímky.

Jsou-li roviny  $^1\pi, ^2\pi$  různé, osa  $s$  neprotíná průsečnici  $x$  rovin  $^1\pi, ^2\pi$  a neleží v  $\pi$  a střed  $S$  hlavního promítání leží na ose  $s$ , splývá průsečík  $H$  osy  $s$  a průmětny  $\pi$  s uzlovými body průmětny. Nechť  $u, v$  jsou sdružené uzlové přímky, označme  $\rho$  rovinu obsahující přímky  $u, v, s$ . Rovina  $\rho$  je promítací v hlavním promítání ( $S$  leží na  $s$ ), průsečnice  $r$  roviny  $\rho$  a průmětny  $\pi$  splývá s průmětem sdružených uzlových přímek, tedy splývá se sdruženými ordinálami  $u_1, v_2$ . Obráceně nechť je v průmětně  $\pi$  dána přímka  $r$  procházející bodem  $H$ . Rovina  $\rho$  určená přímkou  $r$  a osou  $s$  protíná roviny  $^1\pi, ^2\pi$  po řadě v přímkách  $u, v$ , které jsou sdružené uzlové přímky. V tomto případě bod  $H$  nazýváme **hlavní bod** a přímku  $r$  **ordinála**.



Pokud jsou roviny  $1\pi$ ,  $2\pi$  různé, osa  $s$  protíná průsečnici  $x$  rovin  $1\pi$ ,  $2\pi$  a neleží v  $\pi$  a střed  $S$  hlavního promítání neleží na ose  $s$ , pak uzlové body  $U$ ,  $V$  splývají s průsečíkem  $R$  přímk  $s$  a  $x$ . Uzlové body průmětny rovněž splývají a leží na základnici  $x_{12}$ . Jsou-li  $u$ ,  $v$  sdružené uzlové přímky, pak sdružené ordinály procházejí bodem  $U_1 = V_2$ . Obráceně, každé dvě přímky  $u_1$ ,  $v_2$  procházející bodem  $U_1 = V_2$  nemusí být sdružené ordinály, uvažujeme-li přímku  $v'_2$  různou od  $v_2$  procházející  $V_2$ , pak její průmět  $v'$  ze středu  $S$  do roviny  $v_2$  neleží v rovině  $\rho$  určené přímkami  $u$  a  $s$  a tedy  $u$ ,  $v'$  nejsou sdružené uzlové přímky. V případě, že by střed  $S$  hlavního promítání ležel na ose  $s$ , pak (stejně jako v předchozím příkladě) rovina  $\rho$  určená sdruženými uzlovými přímkami  $u$ ,  $v$  (a obsahující tedy  $s$ ) je promítací, sdružené ordinály splývají s průsečnicí  $r$  rovin  $\rho$  a  $\pi$  (ordinála), uzlové body průmětny splývají s průsečíkem  $H$  přímky  $s$  a roviny  $\pi$  (hlavní bod). I obráceně, každá přímka  $r$  procházející bodem  $H$  je ordinála, rovina určená přímkami  $r$  a  $s$  protíná pomocné průmětny ve sdružených uzlových přímkách.



Jestliže roviny  ${}^1\pi, {}^2\pi$  splývají, splývají body  $U, V$  a tedy i uzlové body průmětny  $U_1, V_2$  splývají s bodem  $H$  (hlavní bod), který je průsečíkem osy  $s$  a průmětny  $\pi$ . Sdružené uzlové přímky  $u, v$  splývají, spolu s osou  $s$  tvoří rovinu  $\rho$ , která protne  $\pi$  v přímce  $r$  (ordinála), která splývá se sdruženými ordinálami  $u_1, v_2$ . Obráceně, každá přímka  $r$  procházející bodem  $H$  je ordinála, s osou  $s$  určí rovinu  $\rho$ , která protne  ${}^1\pi = {}^2\pi$  ve sdružených uzlových přímkách.

**Věta:** Necht' je dána základní zobrazovací metoda trojicí středových promítání  $\mathcal{S}(\mathbf{S}, \pi), {}^1\mathcal{S}({}^1\mathbf{S}, {}^1\pi), {}^2\mathcal{S}({}^2\mathbf{S}, {}^2\pi)$  tak, že osa  $s$  neprotíná průsečnici  $x$  rovin  ${}^1\pi, {}^2\pi$ . Označme  $\mathcal{M}$  rozšířený Eukleidovský prostor z něž vyjmeme přímku  $s$  a  $\mathcal{N}$  množinu uspořádaných dvojic bodů z  $\pi$ , které leží na sdružených ordinálách a jsou různé od uzlových bodů. Zobrazení, které každému bodu  $A$  z  $\mathcal{M}$  přiřadíme jeho obraz v základní zobrazovací metodě je bijektivní zobrazení množiny  $\mathcal{M}$  na množinu  $\mathcal{N}$ .

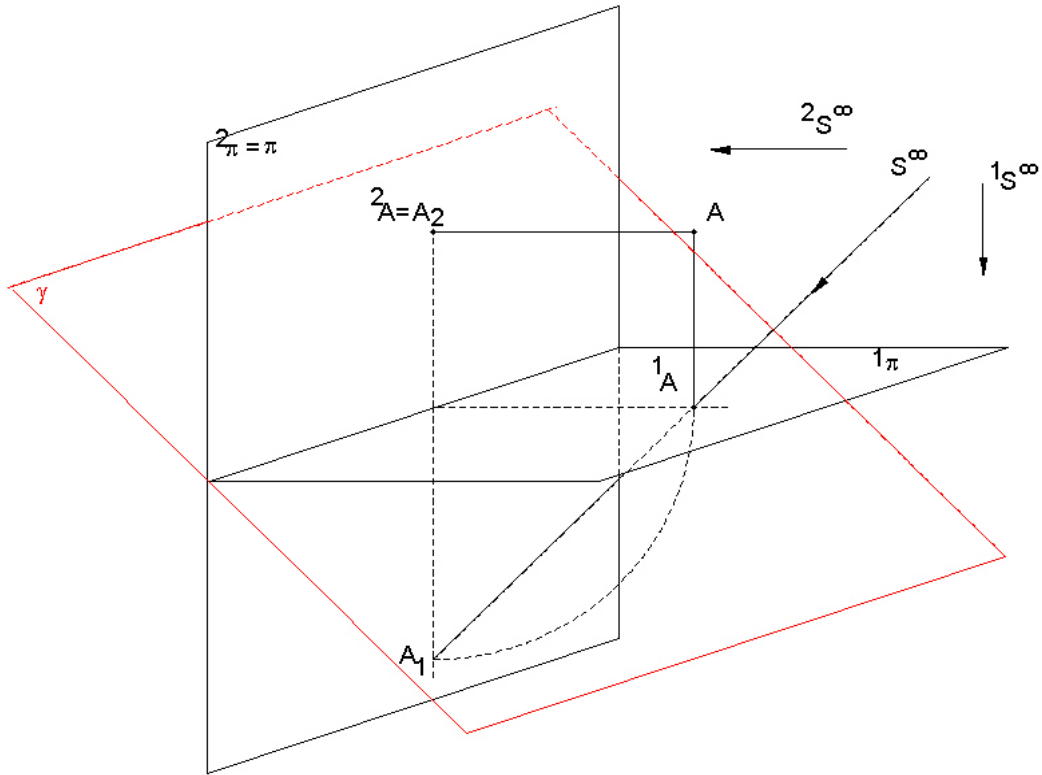
**Důkaz:** Necht'  $A$  je bod množiny  $\mathcal{M}$ . Podle předchozí věty leží průměty  ${}^1A, {}^2A$  bodu  $A$  v promítáních  ${}^1\mathcal{S}({}^1\mathbf{S}, {}^1\pi), {}^2\mathcal{S}({}^2\mathbf{S}, {}^2\pi)$  na sdružených uzlových přímkách rovin  ${}^1\pi, {}^2\pi$ . Z definice ordinál dostáváme, že průměty  $A_1, A_2$  bodů  ${}^1A, {}^2A$  v promítání  $\mathcal{S}(\mathbf{S}, \pi)$  leží na sdružených ordinálách v  $\pi$ . Pokud by platilo např.  $A_1 = U_1$ , pak by musel bod  $S$  ležet na přímce  $U_1A$ , což je spor s předpokladem, že  $S$  neleží v  ${}^1\pi$ . Podobně pro  $A_2 = V_2$ ,

Obráceně, necht' jsou dány sdružené ordinály  $u_1, v_2$ . Osa  $s$  neprotíná průsečnici  $x$  rovin  ${}^1\pi, {}^2\pi$ , sdružené ordinály  $u_1, v_2$  jsou určeny vnitřními podmínkami v  $\pi$ , průsečnice  $u$ , v promítacích roviny přímek  $u_1, v_2$  v promítání  $\mathcal{S}(\mathbf{S}, \pi)$  s rovinami  ${}^1\pi, {}^2\pi$  jsou sdružené uzlové přímky. Jestliže  $A_1$  leží na  $u_1$  (různý od  $U_1$ ) a  $A_2$  leží na  $v_2$  (různý od  $V_2$ ) pak průměty  ${}^1A, {}^2A$  v promítání  $\mathcal{S}(\mathbf{S}, \pi)$  leží na sdružených uzlových přímkách  $u, v$  a podle první věty existuje v prostoru právě jeden bod  $A$  tak, že  ${}^1A, {}^2A$  jsou jeho průměty v promítáních  ${}^1\mathcal{S}({}^1\mathbf{S}, {}^1\pi), {}^2\mathcal{S}({}^2\mathbf{S}, {}^2\pi)$ . Dvojice  $(A_1, A_2)$  je obrazem bodu  $A$  v základní zobrazovací metodě. c.b.d.

Speciální volbou středových promítání dostaneme známé zobrazovací metody, většinou předpokládáme, že střed  $S$  leží na ose  $s$ .

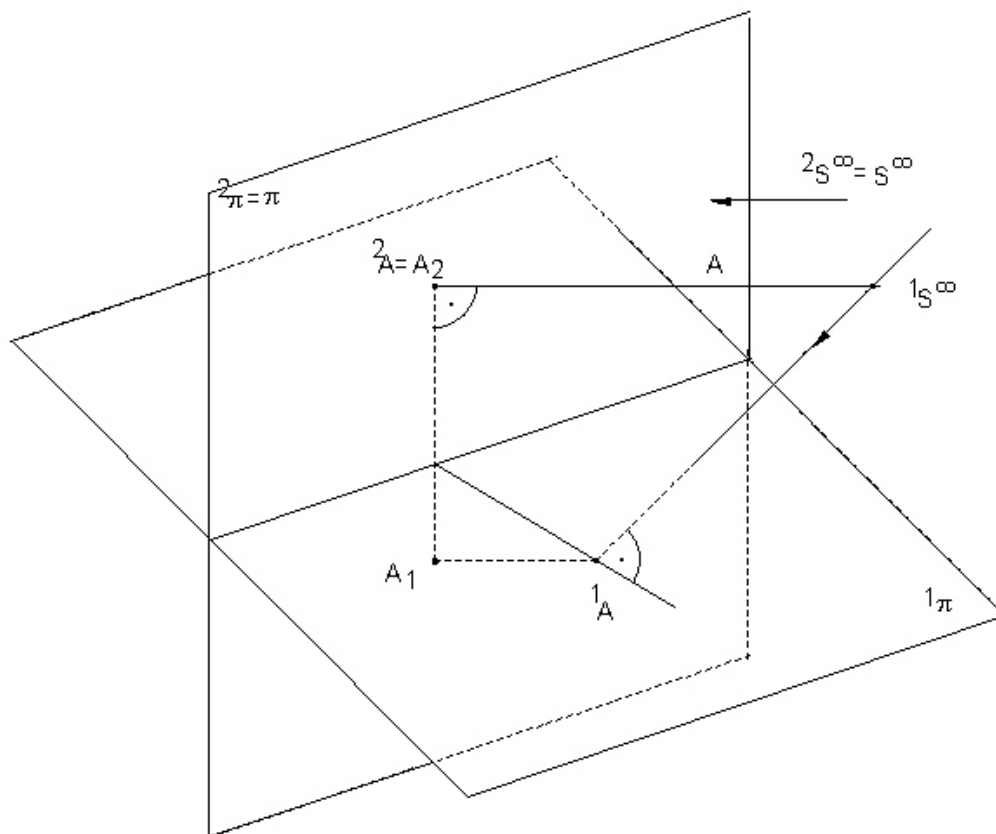
### **Mongeova projekce**

Pomocná promítání volíme tak, že rovina  ${}^1\pi$  je vodorovná a rovina  ${}^2\pi$  je k ní kolmá, Střed  ${}^1S^\infty, {}^2S^\infty$  jsou po řadě určeny směry kolmými na  ${}^1\pi, {}^2\pi$ . Průmětna  $\pi$  splývá s  ${}^2\pi$  a střed  $S^\infty$  je dán přímkami kolmými na rovinu  $\gamma$  totožnosti. Osa  $s^\infty$  je nevlastní přímkou rovin, které jsou kolmé k průsečnici  $x$  rovin  ${}^1\pi, {}^2\pi$ , střed  $S^\infty$  je bodem osy  $s^\infty$ . Protože  ${}^1S^\infty$  leží v rovině  ${}^2\pi$  a  ${}^2S^\infty$  v rovině  ${}^1\pi$ , jsou body  ${}^1S^\infty, {}^2S^\infty$  uzlové body, bod  ${}^1S^\infty$  je rovněž hlavním bodem  $H^\infty$  a ordinály v  $\pi$  jsou kolmice k  $x = x_{12}$ . Každý bod  $A$ , který neleží na ose  $s^\infty$  má pravouhlé průměty  ${}^1A, {}^2A$  do  ${}^1\pi, {}^2\pi$ . Dále  ${}^2A = A_2$  a  $A_1$  je průmětem bodu  ${}^1A$  z  $S^\infty$ , vzhledem k tomu, že přímky směru  $S^\infty$  jsou kolmé ke  $\gamma$ , je promítání bodu  ${}^1A$  do  $A_1$  ekvivalentní s otáčením roviny  ${}^1\pi$  kolem  $x$  do  $\pi$ .



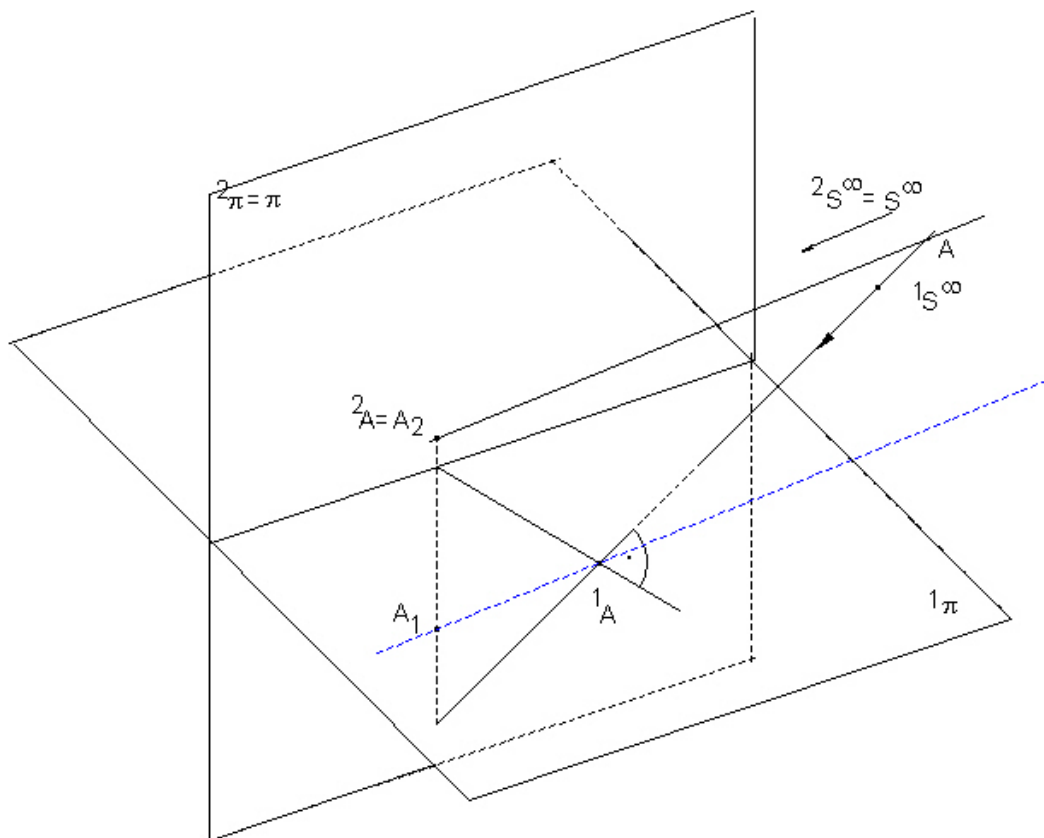
### **Pravouhlá axonometrie**

Rovina  ${}^2\pi$  je svislá a splývá s rovinou  $\pi$ , rovina  ${}^1\pi$  není kolmá k  ${}^2\pi$  a je s ní různá, průsečnice  $x$  rovin  ${}^1\pi$ ,  ${}^2\pi$  je vlastní.  ${}^1S^\infty$ ,  ${}^2S^\infty$  jsou po řadě určeny směry kolnými k  ${}^1\pi$ ,  ${}^2\pi$ , Střed  $S^\infty$  splývá se středem  ${}^2S^\infty$ . Osa  $s^\infty$  je nevlastní přímkou rovin kolných k přímce  $x$ . Uzlové body  $U^\infty = V^\infty$  jsou nevlastní body přímek kolných k  $x$  a ležících v  ${}^1\pi$ ,  ${}^2\pi$ . Roviny  $\pi$  a  ${}^2\pi$  opět splývají a proto jsou ordinály kolmice k  $x = x_{12}$ , jejich nevlastní bod  $H^\infty$  je hlavní bod. Pro bod  $A$  neležící na  $s$  opět splývají průměty  ${}^2A$  a  $A_2$ .  $A_2$  je axonometrický průmět bodu  $A$ ,  $A_1$  je axonometrický půdorys bodu  $A$ .



### ***Kosoúhlá axonometrie***

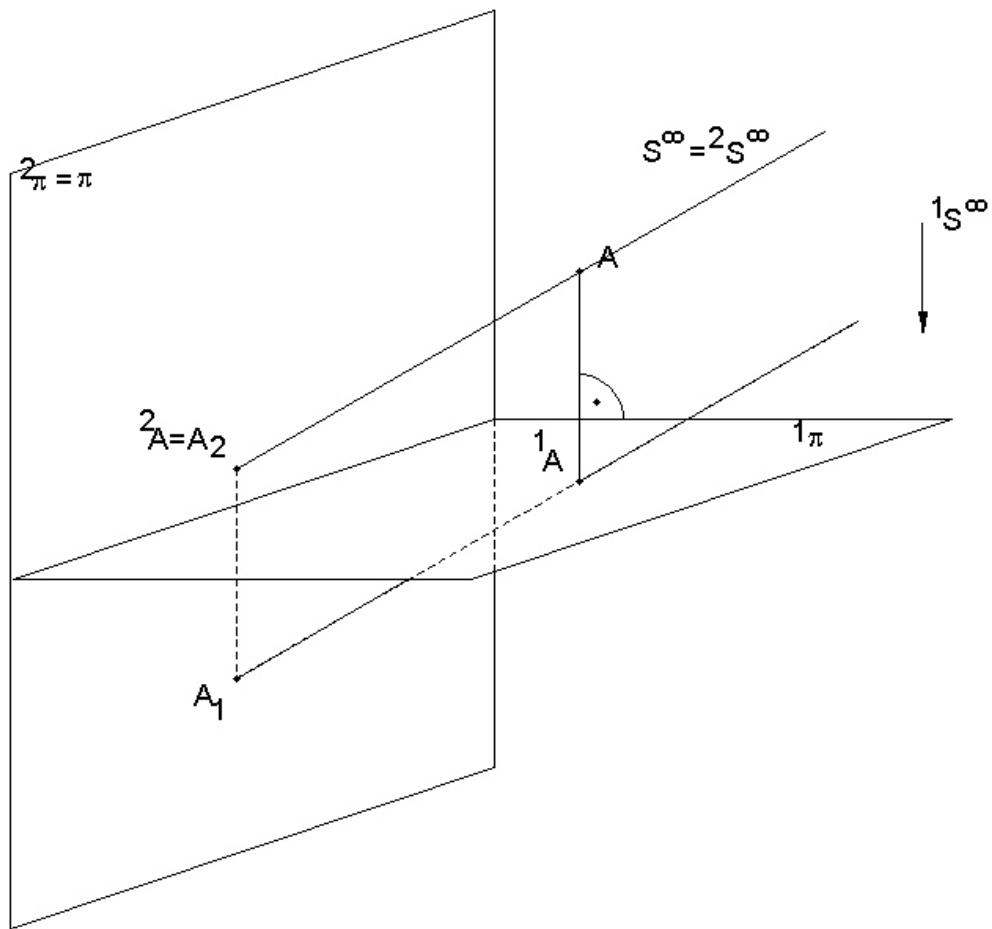
Všetchna tři promítání volíme stejně jako v pro pravouhlou axonometrii s jedinou výjimkou, střed  $\mathbf{S}^\infty = {}^2\mathbf{S}^\infty$  je dán směrem přímk kosých k  $\pi$ . Bod  ${}^2\mathbf{A} = \mathbf{A}_2$  je axonometrický průmět bodu  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_1$  je axonometrický půdorys bodu  $\mathbf{A}$ .



### ***Kosoúhlé promítání***

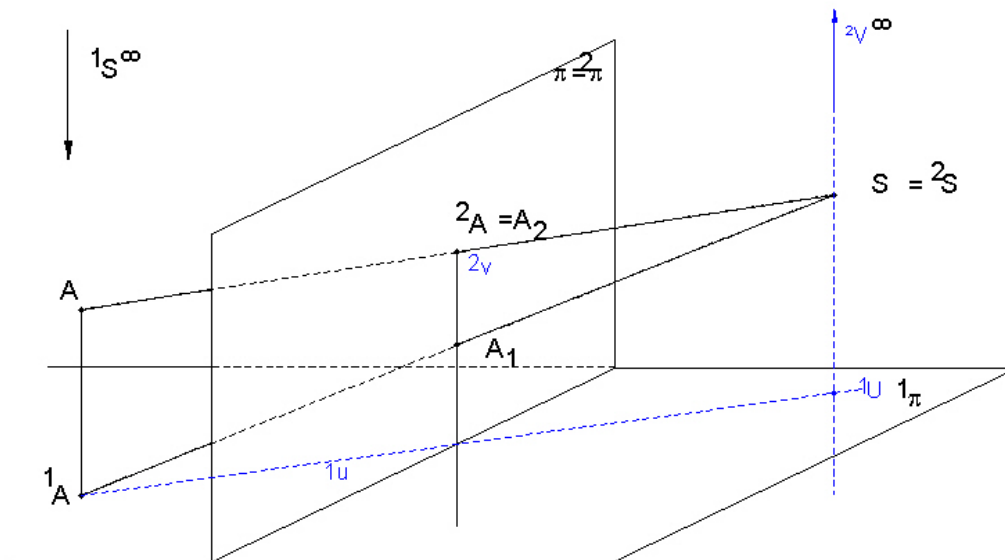
Průmětny  ${}^1\pi$ ,  ${}^2\pi$ ,  $\pi$  a střed  ${}^1S^\infty$  se volí stejně jako v Mongeově projekci, střed  $S^\infty = {}^2S^\infty$  je zvolen jako nevlastní bod přímek kosých k  $\pi$ . Ordinály jsou kolmé k  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{12}$ , bod  ${}^2\mathbf{A} = \mathbf{A}_2$  je kosoúhlý průmět bodu  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_1$  je kosoúhlý půdorys bodu  $\mathbf{A}$ .





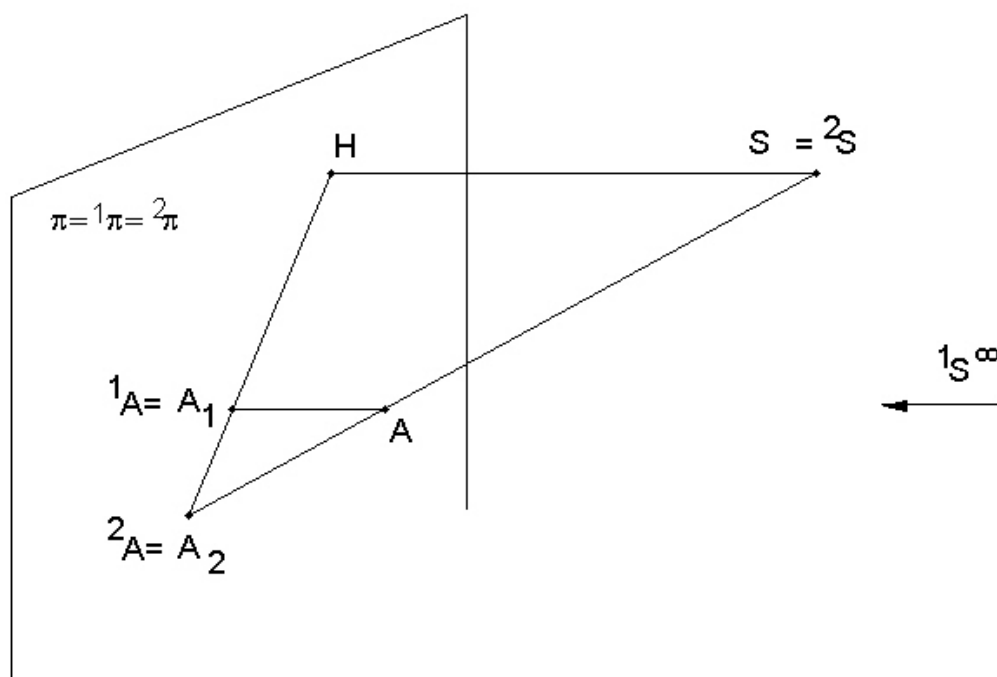
### **Lineární perspektiva**

Průmětny  ${}^1\pi$ ,  ${}^2\pi$ ,  $\pi$  a střed  ${}^1S^\infty$  se volí stejně jako v Mongeově projekci, střed  $S = {}^2S$  je vlastní bod. Osa  $s$  je kolmá k  ${}^1\pi$  a prochází bodem  $S$ . Bod  ${}^1S^\infty$  je uzlový bod v rovině  ${}^2\pi$  a současně hlavní v  $\pi$ . Ordinály jsou svislé přímky, bod  ${}^2A = A_2$  je perspektivní průmět bodu  $A$ ,  $A_1$  je perspektivní půdorys bodu  $A$ .



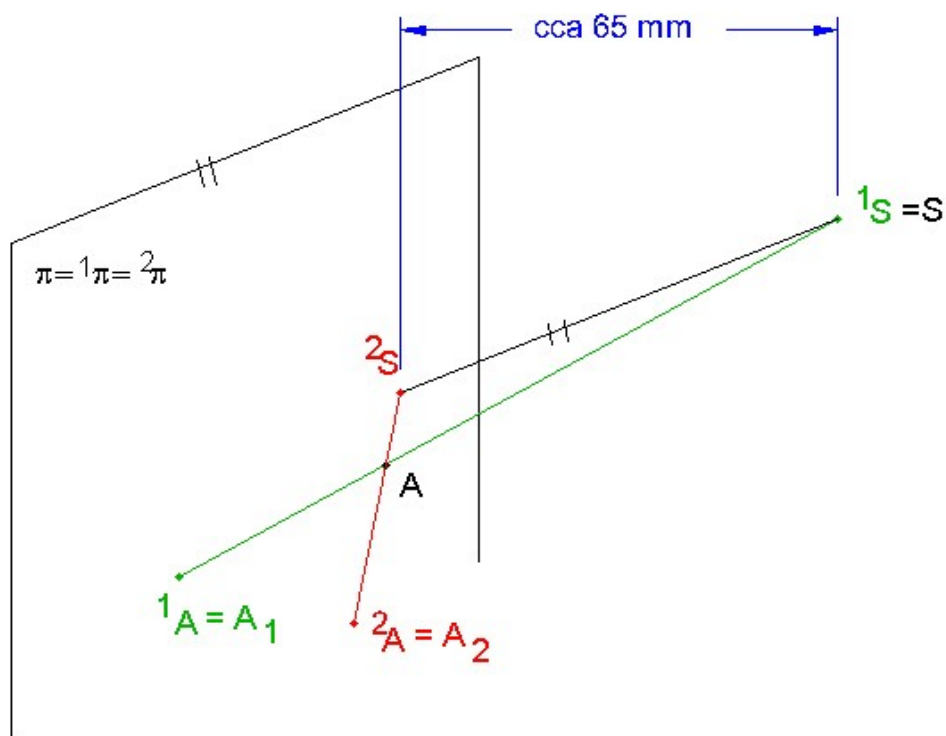
### ***Středové promítání***

Všechny tři průmětny  ${}^1\pi$ ,  ${}^2\pi$ ,  $\pi$  splývají, bod  ${}^1S^\infty$  je dán směrem přímk kolmých k  ${}^1\pi$ ,  ${}^2S$  je vlastní,  $S$  je rovněž vlastní a můžeme jej volit libovolně, většinou pokládáme  ${}^2S=S$ . Osa  $s$  je kolmá k  $\pi$  a prochází  $S$ , její průsečík  $H$  s  $\pi$  je hlavní bod. Ordinály jsou přímky procházející hlavním bodem. Bod  ${}^2A=A_2$  je středový průmět bodu  $A$ ,  $A_1$  je pravouhlý průmět bodu  $A$  do  $\pi$ .



### ***Stereoskopické promítání***

Průmětny  ${}^1\pi, {}^2\pi, \pi$  opět splývají, středy  ${}^1S, {}^2S$  jsou vlastní a osa  $s$  je rovnoběžná s  $\pi$ , vlastní střed  $S$  volíme libovolně, většinou ho ztotožníme s jedním ze středů  ${}^1S, {}^2S$ . Hlavní bod je nevlastní bod osy  $s$ , ordinály jsou rovnoběžné s  $s$ . V praxi stereoskopické promítání přibližujeme lidskému vidění, proto se vzdálenost středů volí cca 65mm (průměrná vzdálenost os očí) a průmětna se volí svislá. Zobrazované předměty se volí v průniku zorných kuželů obou očí. Pozorovatel pak vidí prostorově původní objekt. Ovšem objekt ležící v průniku zorných kuželů očí je buď dost daleko a jeho průměty jsou malé, nebo se jejich průměty překrývají. Aby z každého oka byl vidět jen jeden průmět, sestrojují se průměty v doplňkových barvách (např. červená, zelená) a pozorovatel se pak na obrázek dívá přes brýle se skly ve stejných barvách. (Má-li pravým okem vidět zelený obrázek je na pravém oku červené sklo.) Takovéto stereoskopické obrazy se nazývají **anaglyfy**.



*v obrázku by spojnice  ${}^1A$  a  ${}^2A$  měla být rovnoběžná s  ${}^2S^1S$*

V uvedeném přehledu není uvedeno kótované promítání, protože jej nevytvoříme pomocí základní zobrazovací metody. Každému pravouhlému průmětu bodu je přiřazeno reálné číslo (kóta), kótované promítání je bijektivní zobrazení Eukleidovského prostoru na množinu, která je kartézským součinem množiny bodů průmětny a množiny reálných čísel.