ZBORCENÉ PLOCHY

Přímkové plochy lze vytvořit i jiným způsobem než jsme je dosud konstruovali. V obecném případě lze přímku zadat jako průsečnici dvou rovin, každá přímka v prostoru tak je zadána čtyřmi nezávislými parametry. (Čtyřmi nezávislými podmínkami.) Příkladem geometrické interpretace jednoduché podmínky pro zadání přímky je také to, že přímka protíná danou křivku v jednom bodě nebo se dotýká dané plochy. Uvažujeme-li množinu přímek protínajících tři dané křivky (přímky množiny splňují tři nezávislé podmínky), dostáváme systém přímek závislý na jednom parametru, tedy přímkovou plochu. (Opět provádíme veškeré konstrukce v rozšířeném euklidovském prostoru.) Vytvoříme tak přímkovou plochu jako množinu přímek protínajících tři dané křivky $^{1}\boldsymbol{k}, ^{2}\boldsymbol{k}, ^{3}\boldsymbol{k}$, tzv. **řídící křivky**. (Výjimečně budeme místo některé z řídících křivek uvažovat plochu, jíž se mají přímky plochy dotýkat.) Přímky plochy se nazývají **tvořící přímky**. Parametricky lze přímkovou plochu zapsat ve tvaru $\boldsymbol{p}(u,v)=\boldsymbol{f}(u)+v\boldsymbol{g}(u)$, kde $\boldsymbol{f}(u)$ je řídící křivka a $\boldsymbol{g}(u)$ je směrový vektor tvořící přímky $\boldsymbol{p}$. Jestliže jsou v bodě (u_0, v_0) vektory $\boldsymbol{f}'(u), \boldsymbol{g}(u), \boldsymbol{g}'(u)$ lineárně nezávislé, pak v každém bodě tvořící přímky $\boldsymbol{p}$ existuje právě jedna tečná rovina obsahující přímku $\boldsymbol{p}$. Přímku $\boldsymbol{p}$ nazveme **regulární**.Tečné rovinu všech bodů regulární přímky $\boldsymbol{p}$ vytvoří svazek rovin o ose $\boldsymbol{p}$ a platí pro ně tzv. **Chaslesova věta**:

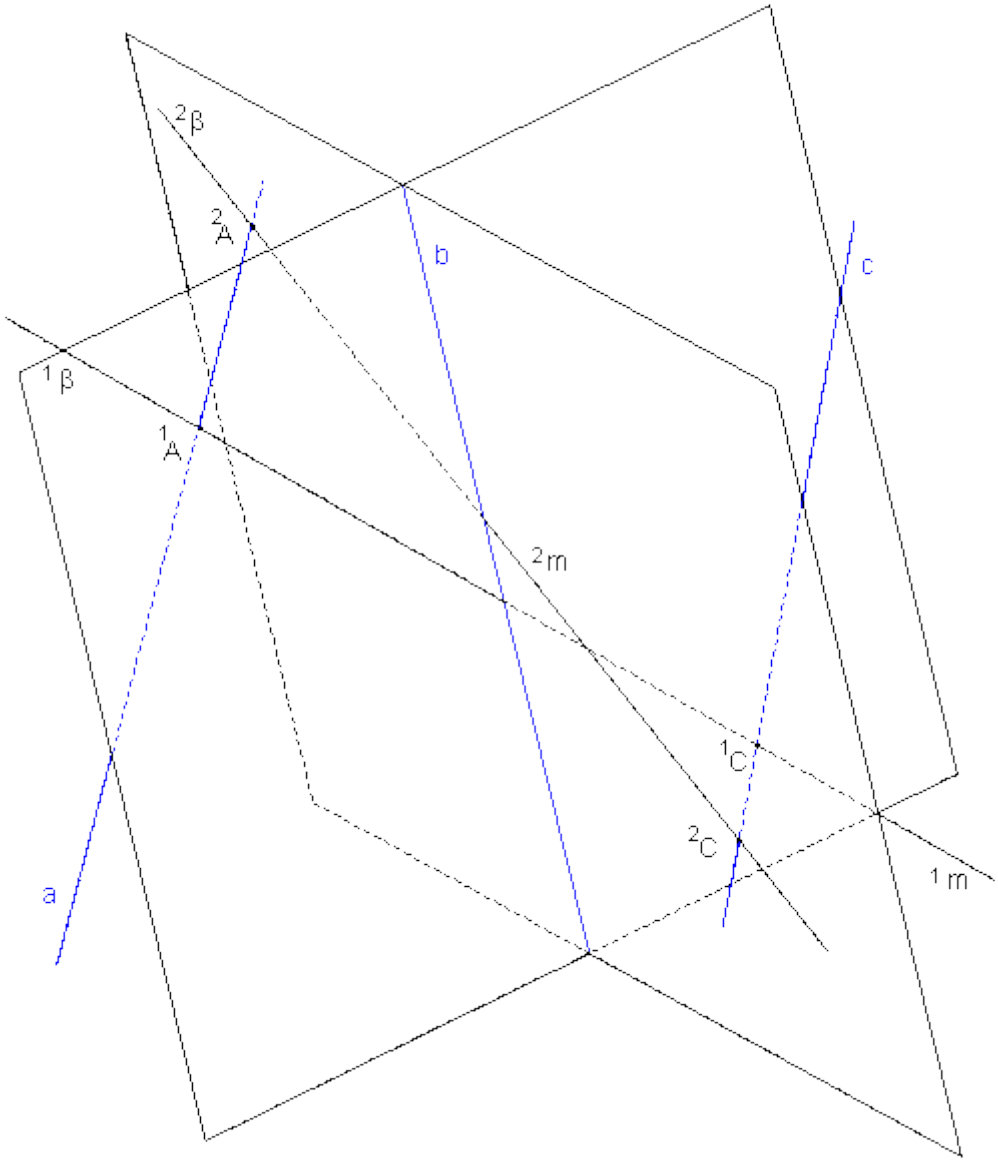
Zobrazení, které každému bodu $\boldsymbol{X}$ regulární přímky $\boldsymbol{p}$ přiřadí tečnou rovinu plochy v bodě $\boldsymbol{X}$ je projektivní, tj. zachovává dvojpoměr.

Přímkové plochy, které obsahují regulární přímky se nazývají **zborcené**.

Jestliže pro bod (u_0, v_0) přímky p platí , že vektory $\boldsymbol{f}'(u), \boldsymbol{g}(u), \boldsymbol{g}'(u)$ jsou lineárně závislé, pak tečné roviny v každém bodě přímky $\boldsymbol{p}$ splývají a existuje tečná rovina, která se dotýká podél celé přímky. Přímka se nazývá **torzální**. Jestliže všechny přímky plochy jsou torzální, je plocha rozvinutelná.

Vlastní tečná rovina α v nevlastním bodě přímky $\boldsymbol{p}$ zborcené plochy Φ se nazývá **asymptotická**. Rovina γ procházející přímkou $\boldsymbol{p}$ a kolmá k α se nazývá **centrální rovina**, její bod dotyku nazveme **centrální bod**. Množina centrálních bodů plochy vytváří tzv. **strikční křivku**.

Nejprve budeme studovat plochy, jejichž řídící křivky jsou tři navzájem mimoběžné přímky $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. (mimoběžné proto, aby plocha byla zborcená). Proložme např. přímkou $\boldsymbol{b}$ roviny $^{1}\beta$, $^{2}\beta$, $^{3}\beta$... Určíme průsečíky $^{1}\boldsymbol{A}$ roviny $^{1}\beta$ a přímky $\boldsymbol{a}$, $^{1}\boldsymbol{C}$ roviny $^{1}\beta$ a přímky $\boldsymbol{c}$, $^{2}\boldsymbol{A}$ roviny $^{2}\beta$ a přímky $\boldsymbol{a}$ atd. Přímky $^{i}\boldsymbol{m}=^{i}\boldsymbol{A}^{i}\boldsymbol{C}$ protínají přímku $\boldsymbol{b}$ v bodech $^{i}\boldsymbol{B}$, tzn., že patří ploše. Zobrazení $\boldsymbol{f}$, které přiřadí bodům $^{i}\boldsymbol{A}$ roviny $^{i}\beta$ a zobrazení $\boldsymbol{g}$ přiřazující rovinám $^{i}\beta$ body $^{i}\boldsymbol{C}$ jsou perspektivní, tedy složení těchto zobrazení přiřazující bodům $^{i}\boldsymbol{A}$ body $^{i}\boldsymbol{C}$ je projektivní. Platí i obráceně, že spojnice odpovídajících si bodů dvou projektivních řad je zborcená plocha.



Zvolme obecnou přímku ***q*** nepatřící ploše Φ. Každým bodem ***B*** přímky ***b*** proložme roviny α =***Ba***, γ=***Bc***, označme ***B´*** průsečík roviny α a přímky ***q*** a ***B´´*** průsečík roviny γ a přímky ***q***. Zobrazení přiřazující bodu ***B*** bod ***B´*** a bodu ***B*** bod ***B´´*** jsou projektivní. Složené zobrazení přiřazující bodu ***B´*** bod ***B´´*** je projektivní, dostáváme soumístnou projektivitu na přímce. Tato projektivita má buď dva různé reálné samodružné bod ***X, Y***, nebo dva reálné splývající nebo dva imaginárně sdružené. Z konstrukce bodů ***B´*** a ***B´´*** je zřejmé že body ***X*** a ***Y*** (a jen těmito body) je možné vést společné příčky ***x, y*** mimoběžek ***a, b, c***. Na přímce ***p*** leží obecně dva (reálné různé, reálné splývající, imaginárně sdružené) body patřící ploše Φ, proto je plocha Φ druhého stupně, tj. kvadrika, nazýváme ji **zborcená kvadrika**.

Uvažujme na Φ příčku ***m*** přímek ***a, b, c***. Proložíme jí rovinu ρ, přímka ***m*** pak patří řezu plochy Φ rovinou ρ. řezem kvadriky je kuželosečka ***k***, ***m*** patří ***k*** a ***k*** je proto singulární kuželosečka, řez se rozpadá na dvě přímky, ***k={m, d}***. Je-li přímka ***d*** různá od přímek ***a, b, c***, pak je s nimi mimoběžná. Kdyby například byla různoběžná s přímkou ***c***, pak by přímka ***c*** ležela v rovině ρ řezu (a tedy by patřila také řezu), protože protíná přímku ***m***. Což je ovšem spor s tím, že řez je singulární kuželosečka. Je-li ***n*** další příčka mimoběžek ***a, b, c***, pak protíná také přímku ***d***. Kdyby přímky ***n*** a ***d*** byly mimoběžné,

průsečík ***N*** přímky ***n*** a roviny ρ by neležel ani na ***m*** ani na ***d***, ale patřil by řezu rovinu ρ a plochy Φ, což je opět spor. Obdobně bychom ukázali, že přímky ***m*** a ***n*** jsou mimoběžné

Ukázali jsme, že na zborcené kvadrice leží dva systémy přímek, tzv. **reguly**. Přímky téhož regulu jsou navzájem mimoběžné**.** Každá přímka jednoho regulu protíná všechny přímky druhého regulu. Zborcená kvadrika je určena kterýmikoli třemi přímkami téhož regulu. Každým bodem ***M*** zborcené kvadriky prochází dvě přímky různých regulů, tyto přímky tvoří tečnou rovinu plochy Φ v bodě ***M***. Podle typu řezu kvadriky nevlastní rovinou dělíme zborcené kvadriky na dva druhy. Kvadrika, jejímž řezem nevlastní rovinou je regulární kuželosečka (tj. neobsahuje nevlastní přímku) se nazývá **zborcený hyperboloid**, kvadrika, jejímž řezem nevlastní rovinou je singulární kuželosečka) tj. obsahuje nevlastní přímku) se nazývá **hyperbolický paraboloid**.

Zborcený hyperboloid

Zborcený hyperboloid Φ je určen třemi mimoběžnými přímkami, které nejsou rovnoběžné s žádnou rovinou (plocha neobsahuje nevlastní přímku). Φ protíná nevlastní rovinu v regulární kuželosečce ***l*** ∞. Pól ***O*** nevlastní roviny ω∞ vzhledem k Φ je střed plochy. Ke každé přímce ***p*** plochy Φ existuje asymptotická rovina α procházející středem ***O***, její nevlastní přímka ***a*** ∞ se dotýká kuželosečky ***l*** ∞ v bodě ***A*** ∞. Množina asymptotických rovin obaluje asymptotickou kuželovou plochu Ω s vrcholem ***O***, Ω se dotýká Φ podél ***l*** ∞. Asymptotická rovina α se dotýká asymptotické kuželové plochy Ω podél přímky ***a´***. α protíná Φ ve dvou přímkách ***a, m*** různých regulů, přímky prochází bodem ***A*** ∞, tj. ***a´, a, m*** jsou rovnoběžné.

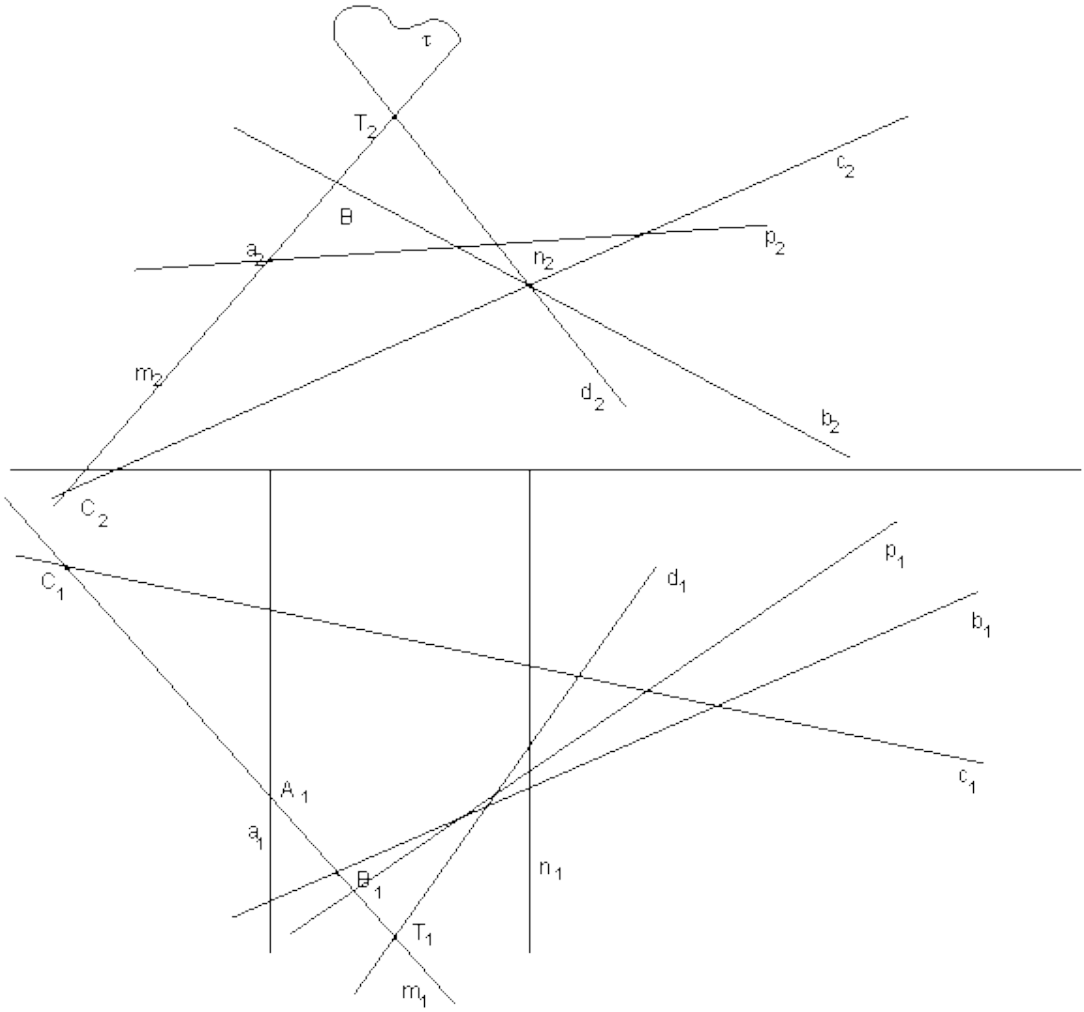
Každá rovina ρ protíná zborcený hyperboloid Φ v kuželosečce. Nemá-li nevlastní přímka ***u*** ∞ roviny ρ žádný společný bod s kuželosečkou ***l*** ∞, pak řez ***k*** neobsahuje nevlastní body a řezem je elipsa. (Nemůže nastat prázdný nebo jednobodový průnik roviny řezu a plochy Φ, protože plocha je přímková). Dotýká-li se ***u*** ∞ kuželosečky ***l*** ∞ v bodě ***U*** ∞ je řezem kuželosečka typu parabola. Leží-li v ρ přímka plochy Φ, pak je ρ asymptotická a řezem je dvojice rovnoběžek, neleží-li v ρ žádná přímka plochy Φ je řezem parabola. Protíná-li ρ kuželosečku ***l*** ∞ ve dvou bodech je řezem kuželosečka typu hyperbola. Obsahuje-li ρ přímku plochy, je ρ tečnou rovinou a řezem je dvojice různoběžek. Neobsahuje-li ρ přímku plochy, je řezem hyperbola. Protože se plochy Φ a Ω dotýkají podél ***l*** ∞, je řezem Φ i Ω vždy kuželosečka stejného afinního typu. Obecný řez zborcené plochy pak sestrojujeme jako u rozvinutelných ploch, hledáme průsečíky přímek plochy s rovinou řezu.

Mez vlastního stínu kvadriky při osvětlení ze středu ***S*** je řezem plochy Φ polární rovinou ρ bodu ***S*** vzhledem k Φ. Pro rovnoběžné osvětlení zborceného hyperboloidu je mezí vlastního stínu řez rovinou procházející středem ***O***. Nevlastní přímka ***u*** ∞ polární roviny ρ bodu ***Σ*** ∞ vzhledem k Φ je polárou bodu ***Σ***∞ vzhledem ke kuželosečce ***l*** ∞. Jestliže ***Σ***∞ leží vně kuželosečky ***l*** ∞ (tj. paprsek ***s*** směru osvětlení vedený vrcholem ***O*** asymptotické kuželové plochy Ω leží vně Ω), polára ***u*** ∞ protíná ***l*** ∞ ve dvou různých bodech a mezí vlastního stínu je hyperbola (rovina ρ prochází středem kvadriky, tj. ρ není tečná). Leží-li ***Σ***∞ uvnitř ***l*** ∞ (***s*** vedený vrcholem ***O*** leží uvnitř Ω) nemá polára ***u*** ∞ s kuželosečkou ***l*** ∞ společný bod a mezí vlastního stínu je elipsa. Leží-li ***Σ***∞ na ***l*** ∞ (***σ*** ακ ρϖοπ εφ Ω), je polára ***u*** ∞ tečnou ***l*** ∞ v bodě ***Σ***∞, rovina ρ je asymptotická a mez vlastního stínu je tvořena dvěma rovnoběžkami.

Př. V Mongeově projekci je dán zborcený hyperboloid mimoběžkami ***a, b, c***, **a** je kolmá k ν. V bodě ***T*** plochy sestrojte tečnou rovinu.

Přímky ***a, b, c*** jsou přímky prvního regulu plochu, přímky druhého regulu protínají přímky prvního regulu, druhému regulu patří přímka ***n*** rovnoběžná s přímkou ***a***, její nárys n_2 je průsečík přímek b_2 a c_2. Nárysy přímek druhého regulu tvoří svazek přímek o středu a_2 (kromě přímky ***n***). Nárysy přímek prvního regulu tvoří svazek o středu n_2 (kromě přímky ***a***). Druhý skutečný obrys plochy Φ je mez vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení ve směru kolmém k ν, přímky ***a, n*** patří směru osvětlení a jsou tedy mezí vlastního stínu. Druhý zdánlivý obrys je pak průmět do ν, tedy druhým zdánlivým obrysem je dvojice bodů a_2, n_2. Nárysy přímek plochy tvoří dva svazky o středech a_2, n_2 s vyloučením přímky a_2n_2 První skutečný je obrys je kuželosečka - hyperbola nebo elipsa. Bod ***T*** plochy je dán nárysem T_2. Tečná rovina τ je určena dvěma přímkami ***d, m*** různých regulů protínajícími se v

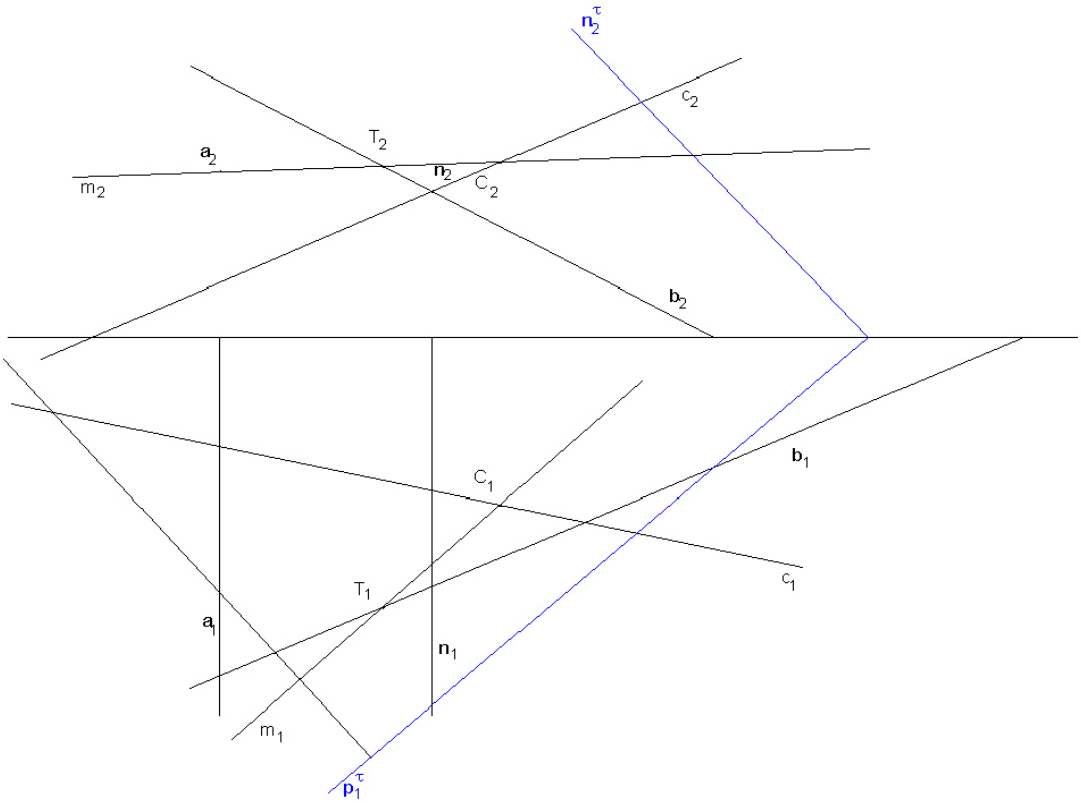
bodě ***T***. $m_2=T_2a_2$, $d_2=T_2n_2$. Určíme půdorysy přímek ***d, m***. Přímka ***m*** protíná přímky ***a, b, c*** v bodech ***A, B, C***, sestrojíme jejich půdorysy a získáme půdorys přímky ***m*** i bodu ***T***. Půdorys přímky ***d*** sestrojíme pomocí průsečíků s přímkami druhého regulu, proto sestrojíme ještě přímku ***p*** druhého regulu a půdorys přímky ***d*** určíme pomocí průsečíků s přímkami ***m, p***.



Mají-li přímky ***a, b, c*** obecnou polohu vzhledem k průmětnám, je třeba řešit obecně úlohu příčka tří mimoběžek jdoucí daným bodem.

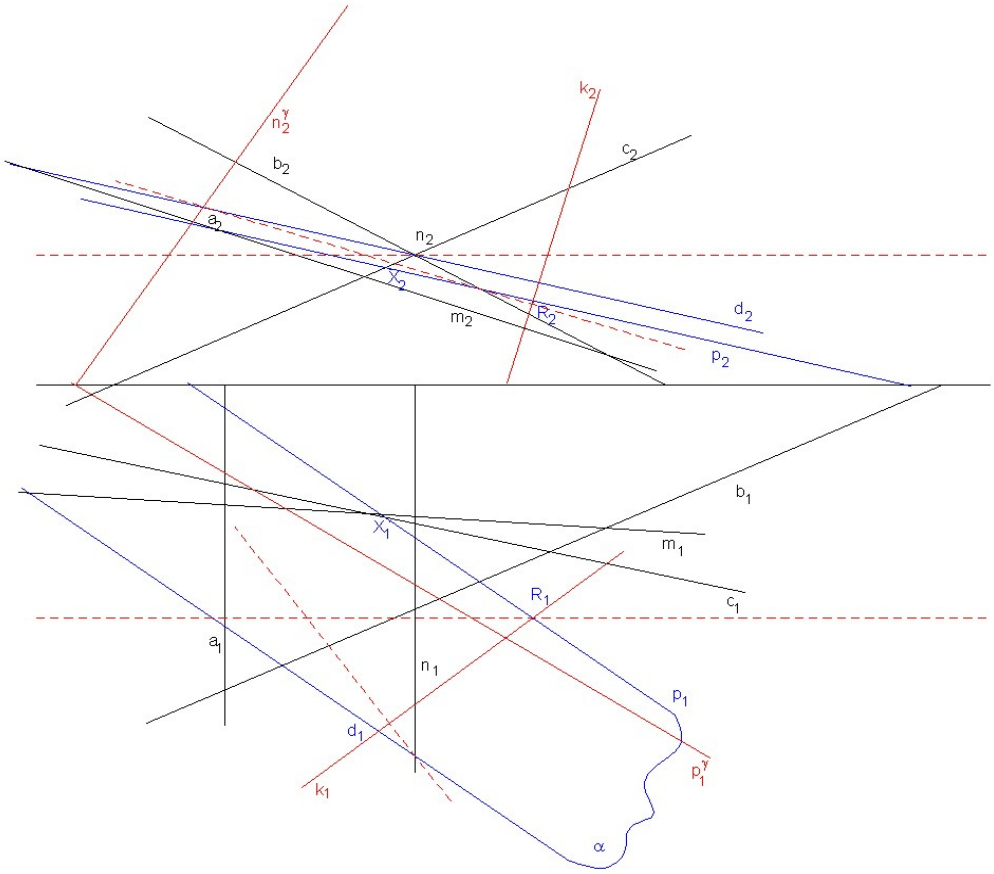
Př. V Mongeově projekci je dán zborcený hyperboloid mimoběžkami ***a, b, c, a*** je kolmá k ν. Určete bod dotyku tečné roviny τ procházející přímkou ***b***.

Stejně jako v předchozím případě tvoří nárysy přímek obou regulů dva svazky přímek a_2, n_2. Hledáme bod dotyku roviny τ s plochou Φ. V rovině τ leží přímky různých regulů, jedna z nich je **b**. Určíme např. průsečík ***C*** přímky ***C*** a roviny τ, ***C*** je bod plochy ležící v rovině τ, tj. prochází jím přímka ***m*** druhého regulu ležící v rovině τ. Její nárys m_2 je spojnice a_2C_2, průsečík T_2 přímek b_2 a m_2 je nárys bodu dotyku.

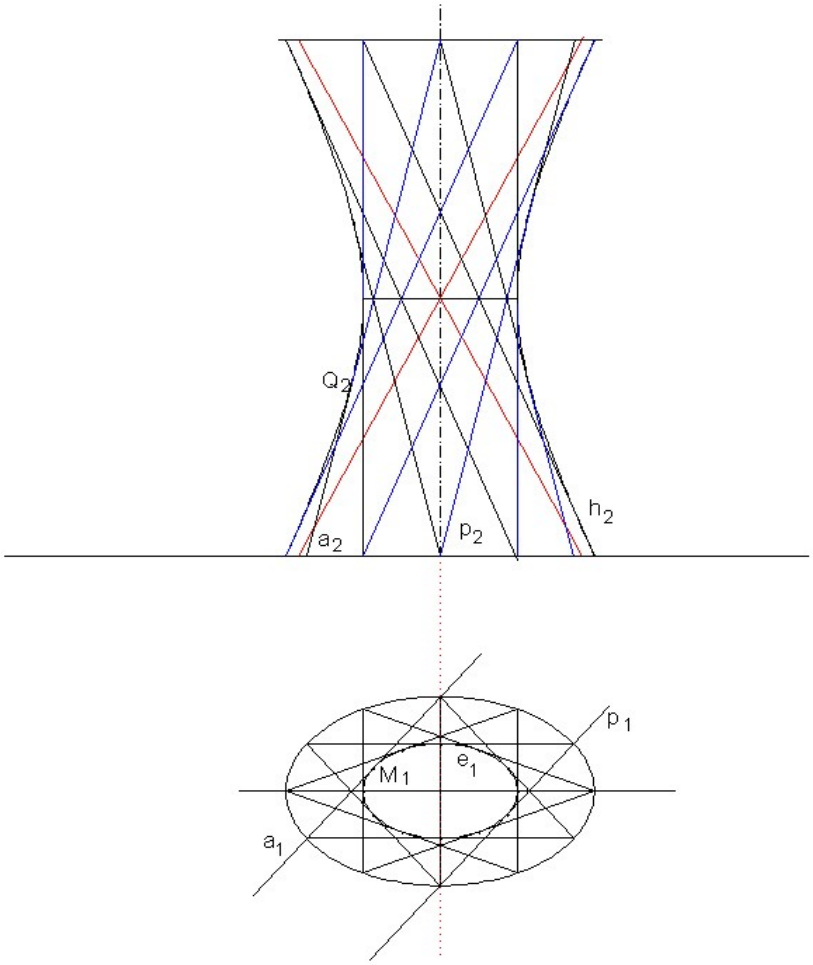


Př. V Mongeově projekci je dán zborcený hyperboloid mimoběžkami ***a, b, c, a*** je kolmá k ν. Určete asymptotickou rovinu přímky ***p*** druhého regulu, centrální rovinu a centrální bod přímky ***p***.

Zvolme libovolně ***p***, nárys p_2 prochází a_2, sestrojíme půdorys pomocí průsečíků s přímkami ***b, c***. V asymptotické rovině α leží dvě přímky ***p, d*** různých regulů, které jsou rovnoběžné. Nárys d_2 prochází n_2 (průsečík b_2 a c_2) rovnoběžně s p_2. Půdorys d_1 určíme pomocí další přímky ***m*** druhého regulu. Asymptotická rovina α je tvořena přímkami ***d, p***. Centrální rovina γ prochází přímkou ***p*** kolmo k α. Sestrojíme přímku ***k*** kolmou k rovině α a procházející bodem ***R*** přímky ***p***. (Např. pomocí hlavních přímek). Přímkami ***p, k*** je určena centrální rovina a podle předchozí úlohy sestrojíme její bod dotyku - centrální bod.



Afinním obrazem rotačního jednodílného hyperboloidu je zborcený hyperboloid a každý zborcený hyperboloid je také tak možno vytvořit, toho využíváme při konstrukci. Na obrázku je zborcený hyperboloid v Mongeově projekci dán osou kolmou k π, prvním skutečným obrysem je hrdelní elipsa (řez rovinou rovnoběžnou s π procházející středem), druhým skutečným obrysem je hyperbola (řez rovinou rovnoběžnou s ν procházející středem). Zvolíme-li přímku ***a*** prvního regulu, pak půdorys $\boldsymbol{a_1}$ se dotýká půdorysu $\boldsymbol{e_1}$ elipsy v bodě $\boldsymbol{M_1}$, nárys $\boldsymbol{a_2}$ se dotýká nárysu $\boldsymbol{h_2}$ hyperboly v bodě $\boldsymbol{Q_2}$. Na ploše existuje přímka ***p*** rovnoběžná s ***a***, která spolu s ***a*** tvoří asymptotickou rovinu, která obaluje asymptotickou kuželovou plochu, jejím druhým zdánlivým obrysem jsou asymptoty hyperboly $\boldsymbol{h_2}$.



Ve stavební praxi využíváme toho, že jde o přímkovou plochu. Ve směru povrchových přímek můžeme klást vyztužení železem a vzniklá železobetonová konstrukce je tak velmi pevná a stabilní. Zborceného rotačního hyperboloidu se využívá zejména při stavbě chladících věží, kde není nejužší část hyperboloidu uprostřed, ale výše. Částí přímek ve spodní části hyperboloidu bývá použito jako nožek, které drží hmotu chladící věže a kudy do ní proudí vzduch.

Hyperbolický paraboloid

Mějme zborcenou kvadriku, která obsahuje nevlastní přímku $\boldsymbol{c}^{\infty}$. Nevlastní rovina ω^{∞} protíná kvadriku v kuželosečce, $\boldsymbol{c}^{\infty}$ patří řezu kvadriky Φ touto rovinou a řezu tedy patří ještě jedna přímka $\boldsymbol{q}^{\infty}$ druhého regulu a nevlastní rovina ω^{∞} je pak tečnou rovinou plochy Φ. Kvadriky se dotýká nevlastní rovina je to tedy paraboloid. Přímky $\boldsymbol{c}^{\infty}$ a $\boldsymbol{q}^{\infty}$ jsou dány různoběžnými rovinami α, σ, které se nazývají **řídící roviny**. Všechny přímky druhého regulu protínají přímky prvního regulu (i přímku $\boldsymbol{c}^{\infty}$), proto jsou přímky druhého regulu rovnoběžné s jednou řídící rovinou. Podobně přímky prvního regulu jsou rovnoběžné s druhou řídící rovinou. Hyperbolický paraboloid je tedy možné zadat třemi (vlastními) mimoběžkami rovnoběžnými s jednou rovinou, dvěma mimoběžnými přímkami a rovinou (řídící) s nimi různoběžnou (tj. tři mimoběžky, dvě vlastní a jedna nevlastní). Ukázali jsme, že kvadriku je možné zadat dvěma projektivními řadami bodů na mimoběžných přímkách ***a, b***. Nevlastní body těchto přímek leží na přímce $\boldsymbol{q}^{\infty}$ (***a, b*** jsou přímky prvního regulu a musí protnout přímku $\boldsymbol{q}^{\infty}$ druhého regulu). V projektivnosti si pak odpovídají nevlastní body a zobrazení je podobnost. (Podobnost je určena dvěma dvojicemi odpovídajících si bodů a zachovává dvojpoměr.) Odtud plyne, že hyperbolický paraboloid je možné zadat rovněž dvěma mimoběžkami s dvěma dvojicemi odpovídajících si bodů.

Průsečík $\boldsymbol{R}^{\infty}$ přímek $\boldsymbol{c}^{\infty}$ a $\boldsymbol{q}^{\infty}$ je bod dotyku nevlastní roviny ω^{∞}, je to nevlastní bod průsečnice ***r*** řídících rovin α a σ. Tečná rovina hyperbolického paraboloidu Φ kolmá k přímce ***r*** se dotýká plochy Φ ve **vrcholu *V***. Přímka ***o*** rovnoběžná s přímkou ***r*** a procházející vrcholem se nazývá **osa** plochy Φ.

Řez plochy Φ rovinou ρ určíme opět bodově jako množinu průsečíků přímek plochy s rovinou řezu. Řez obecnou rovinou je kuželosečka, její typ určíme pomocí polohy nevlastní přímky $\boldsymbol{u}^{\infty}$ roviny ρ a nevlastních přímek $\boldsymbol{c}^{\infty}$ a $\boldsymbol{q}^{\infty}$ plochy Φ. Jestliže u^{∞} neprochází bodem $\boldsymbol{R}^{\infty}$ (rovina r není rovnoběžná s osou o), přímka $\boldsymbol{u}^{\infty}$ protíná přímky $\boldsymbol{c}^{\infty}$ a $\boldsymbol{q}^{\infty}$ ve dvou různých bodech a řezem je kuželosečka typu hyperbola. (Jestliže ρ obsahuje přímku plochy, jedná se o tečnou rovinu a řezem je dvojice různoběžek, jestliže neobsahuje přímku plochy, je řezem hyperbola.) Pokud $\boldsymbol{u}^{\infty}$ prochází bodem $\boldsymbol{R}^{\infty}$ a současně je různá od přímek $\boldsymbol{c}^{\infty}$, $\boldsymbol{q}^{\infty}$, pak je rovina ρ řezu rovnoběžná s osou ***o*** plochy, ale není rovnoběžná s žádnou řídící rovinou plochy Φ. Řezem je parabola. Kdyby řezu patřila přímka plochy, musela by procházet bodem $\boldsymbol{R}^{\infty}$ a tímto bodem by pak procházely tři přímky plochy. (Tj. neexistuje tečná rovina hyperbolického paraboloidu rovnoběžná s osou ***o*** a současně různoběžná s oběma řídícími rovinami.) Pokud $\boldsymbol{u}^{\infty}$ splyne s některou z přímek (např. $\boldsymbol{c}^{\infty}$), pak rovina ρ protíná plochu ještě v jedné vlastní přímce ***p*** druhého regulu. (Řezem je singulární kuželosečka typu parabola.) Jedná se tedy o tečnou rovinu, která je tvořena dvěma přímkami různých regulů, které se protínají v nevlastním

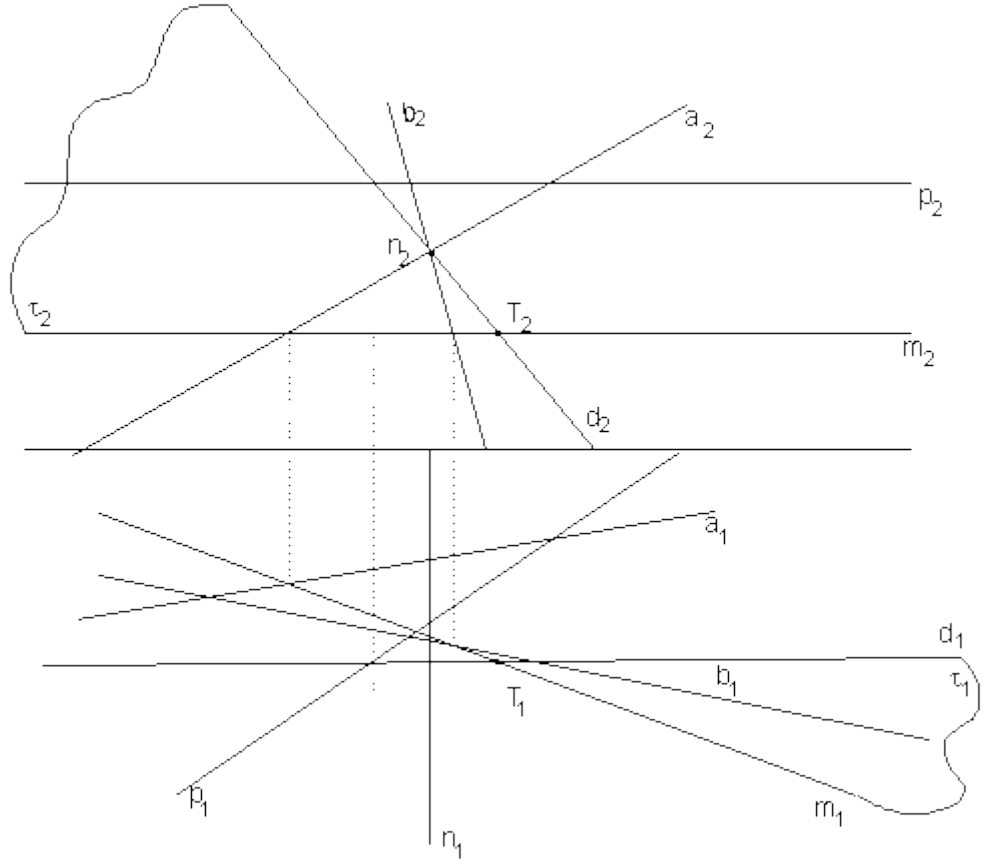
bodě (bod dotyku). ρ je asymptotická rovina. Ukázali jsme, že na paraboloidu se vyskytují kromě parabolických jen hyperbolické řezy, a proto se nazývá hyperbolický.

Mez vlastního stínu při osvětlení ze středu ***S*** je řezem polární roviny ρ bodu ***S*** vzhledem ke kvadrice Φ. Budeme uvažovat rovnoběžné osvětlení ze středu S^{∞}. Nevlastní přímka u^{∞} polární roviny bodu S^{∞} je polárou tohoto bodu vzhledem k singulární kuželosečce tvořené přímkami c^{∞}, q^{∞}. Jestliže S^{∞} neleží na žádné z přímek c^{∞}, q^{∞}, pak přímka u^{∞} prochází bodem R^{∞} a je různá od přímek c^{∞}, q^{∞}. Mezí vlastního stínu je parabola. Jestliže S^{∞} leží například na c^{∞}, a je různý od R^{∞} (přímka ***s*** je rovnoběžná s jednou řídící rovinou), pak $S^{\infty} \in$ patří ploše Φ, $u^{\infty} = c^{\infty}$ a rovina ρ je tečnou rovinou v bodě S^{∞} a obsahuje ještě vlastní přímku ***p*** druhého regulu. Mezí vlastního stínu je přímka ***p*** rovnoběžná s přímkou ***s***. Jestliže S^{∞} splyne s R^{∞} (***s*** je rovnoběžná s osou ***o***), ρ splyne s nevlastní rovinou a mez vlastního stínu neexistuje.

Př. Hyperbolický paraboloid je dán přímkami ***a, b*** prvního regulu a řídící rovinou π. Sestrojte tečnou rovinu v daném bodě plochy Φ.

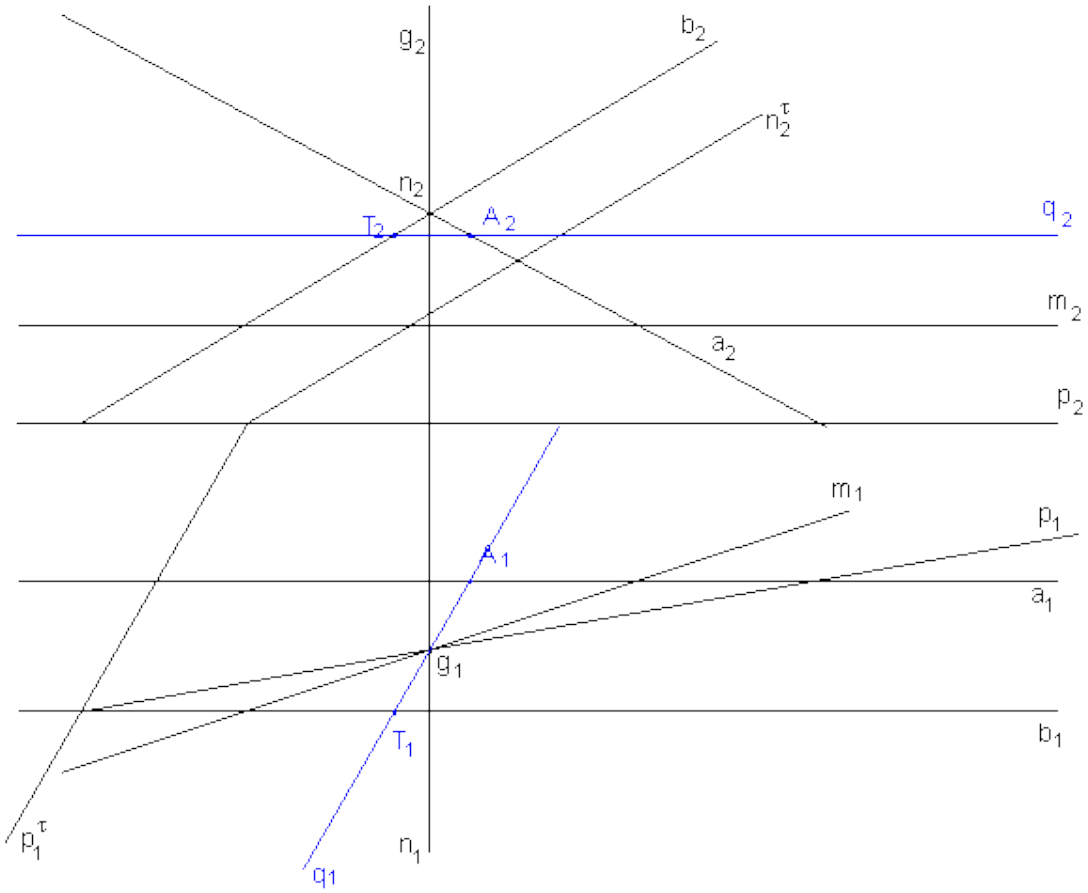
Všechny přímky plochy Φ druhého regulu jsou rovnoběžné s řídící rovinou π, tj. nárysy přímek druhého regulu jsou rovnoběžné se základnicí (kromě přímky kolmé k ν). Druhá řídící rovina je libovolná rovina rovnoběžná s přímkami ***a, b.*** Přímka ***n*** kolmá k ν, jejíž nárys n_2 prochází průsečíkem a_2 a b_2 patří ploše a je druhého regulu. Všechny přímky prvního regulu protínají všechny přímky druhého regulu, proto nárysem přímek prvního regulu je svazek přímek o středu n_2 (kromě přímky rovnoběžné se základnicí). Přímka ***n*** patří směru osvětlení kolmému k ν, tj. je druhým skutečným obrysem. Prvním skutečným obrysem je parabola.

Bod ***T*** je zadán nárysem T_2. Tečná rovina v bodě ***T*** je určena dvěma přímkami různých regulů. Nárys m_2 přímky druhého regulu je rovnoběžný se základnicí a prochází T_2 a nárys d_2 přímky prvního regulu je dán body n_2T_2. Půdorys přímky ***m*** určíme pomocí průsečíků s přímkami ***a, b***, pro sestrojení půdorysu přímky ***d*** musíme ještě sestrojit průměty další přímky ***p*** druhého regulu.



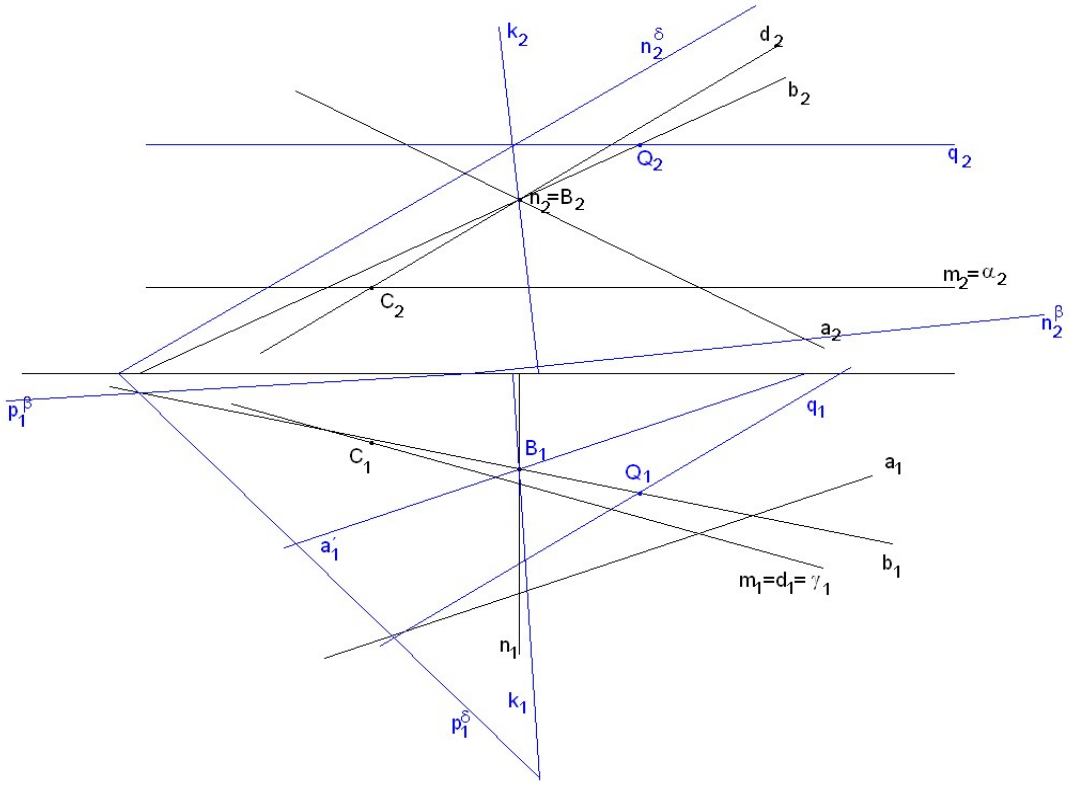
Př. Hyperbolický paraboloid je dán přímkami ***a, b*** prvního regulu rovnoběžnými s nárysnou a řídící rovinou π. Sestrojte bod dotyku tečné roviny τ procházející přímkou ***b***.

Nárysy přímek druhého regulu jsou opět rovnoběžné se základnicí a nárysy přímek prvního regulu vytvářejí svazek o ose n_2, kde n_2 je průsečík a_2 a b_2. Nárysna je druhá řídící rovina, proto půdorysy přímek prvního regulu jsou rovnoběžné se základnicí. Jsou-li sestrojeny přímky ***m*** a ***p*** druhého regulu, pak průsečík g_1 přímek m_1 a p_1 je půdorysem přímky prvního regulu kolmé k π. Protože všechny přímky druhého regulu protínají všechny přímky prvního regulu, patří ***g*** prvnímu regulu, patří také směru osvětlení kolmému k π a je proto prvním zdánlivým obrysem. Půdorysy přímek druhého regulu vytváří svazek o středu g_1. Přímky ***n*** a ***g*** se musí rovněž protínat (jsou různých regulů), proto g_1 leží na n_1 a naopak. Tečná rovina τ je dána stopami. Je tvořena přímkami různých regulů, které se protínají v bodě dotyku. Konstrukce je stejná jako u zborceného hyperboloidu. Určíme průsečík ***A*** roviny τ a přímky ***a***, je to bod plochy a musí jím procházet přímka ***q*** druhého regulu ležící v rovině τ. Průsečík ***T*** přímek ***q*** a ***b*** je hledaný bod dotyku.



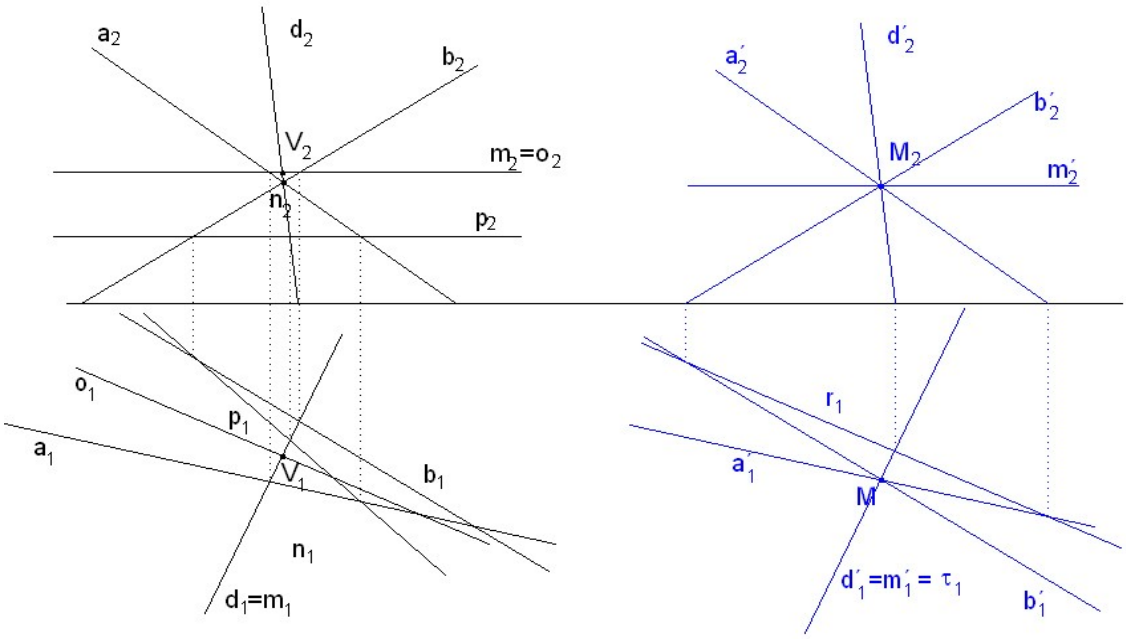
Př. Hyperbolický paraboloid je dán přímkami ***a, b*** prvního regulu a řídící rovinou π. Sestrojte asymptotické roviny plochy procházející přímkou ***b*** a přímkou ***m*** druhého regulu, určete centrální roviny těchto přímek a jejich centrální body.

Jako v prvním příkladě jsou nárysy přímek druhého regulu rovnoběžné se základnicí a nárysy přímek prvního regulu tvoří svazek o středu n_2. Řídící rovina přímek druhého regulu je π, řídící rovina přímek prvního regulu je jakákoli rovina σ rovnoběžná s přímkami ***a, b***. Asymptotická rovina je tečná rovina v nevlastním bodě. Protože plocha Φ protíná nevlastní rovinu v singulární kuželosečce, tvoří řez asymptotické roviny plochou Φ přímka vlastní a přímka nevlastní opačného regulu daná řídící rovinou. Tj. asymptotická rovina α přímky ***m*** prochází přímkou ***m*** a je rovnoběžná s rovinou π, asymptotická rovina β přímky ***b*** prochází přímkou ***b*** a je rovnoběžná s řídící rovinou σ. Centrální roviny jsou kolmé k asymptotickým, centrální body jsou jejich body dotyku. Centrální rovina γ přímky ***m*** je kolmá k půdorysně, patří směru osvětlení kolmému k π a její bod dotyku tedy patří prvnímu skutečnému obrysu plochy. Prvním skutečným obrysem je v tomto případě tedy strikční křivka plochy příslušná druhému regulu. (Body dotyku centrálních rovin sestrojíme stejně jako v předchozím příkladě.) Centrální rovina δ přímky ***b*** je určena přímkou ***b*** a některou kolmicí ***k*** k rovině β různoběžnou s ***b***.

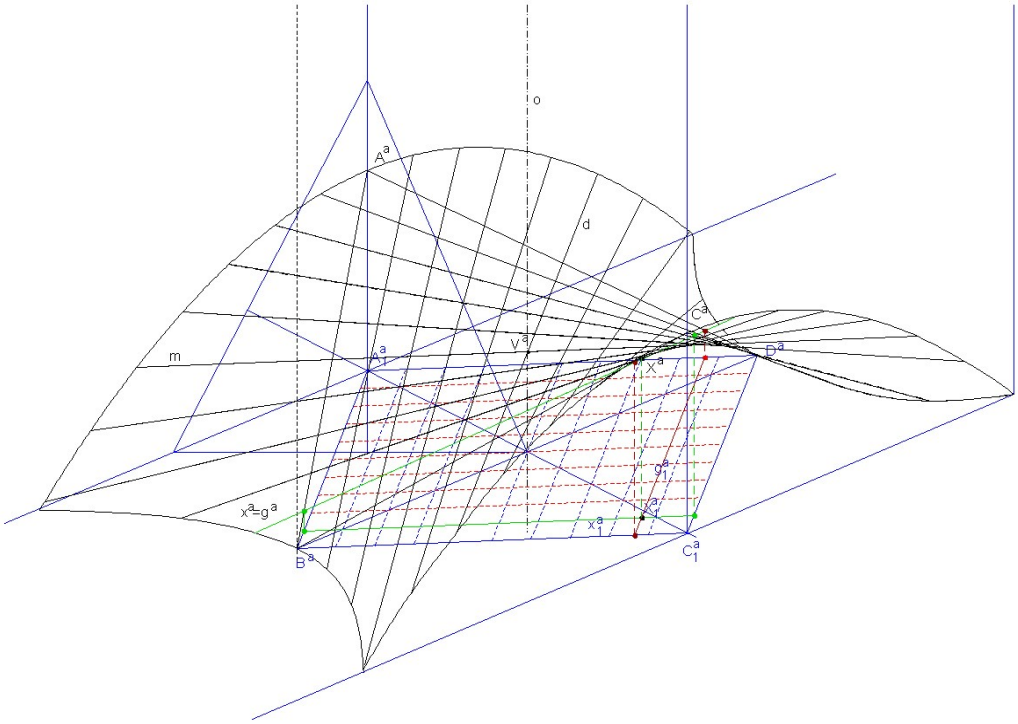


Př. Hyperbolický paraboloid je dán přímkami ***a, b*** prvního regulu a řídící rovinou π. Sestrojte jeho vrchol a osu.

Přímky obou regulů plochy Φ se zobrazují jako v předchozích příkladech. Osa ***o*** plochy Φ je přímka rovnoběžná s průsečnicí ***r*** řídících rovin π a σ, s je rovnoběžná s přímkami ***a, b***. Tečná rovina τ kolmá k ***r*** se dotýká Φ ve vrcholu ***V***. Libovolným bodem ***M*** v prostoru vedeme přímky ***a´, b´*** rovnoběžné s přímkami ***a, b***, ty nám určí řídící rovinu σ. Průsečnice ***r*** rovin π a σ určí směr osy ***o***. Rovina τ je tedy kolmá k π. Bodem ***M*** vedeme rovinu τ´ kolmou k ***r***, ta nám protíná řídící roviny v přímkách ***d´, m´***. Tyto přímky jsou rovnoběžné s přímkami plochy Φ i s tečnou rovinou τ. Sestrojíme-li přímky ***d, m*** plochy rovnoběžné s přímkami ***d´, m´***, určí nám tyto přímky tečnou rovinu τ a jejich průsečík ***V*** je vrchol hyperbolického paraboloidu Φ. Vrcholem ***V*** prochází osa ***o***. Nárys přímky ***d*** prochází bodem n_2, půdorys sestrojíme pomocí některé přímky π druhého regulu. Půdorysy přímek ***m*** a ***d*** splynou a pomocí půdorysů průsečíku přímky ***m*** s přímkami ***a, b*** určíme nárys přímky ***m*** a nárys vrcholu ***V***.

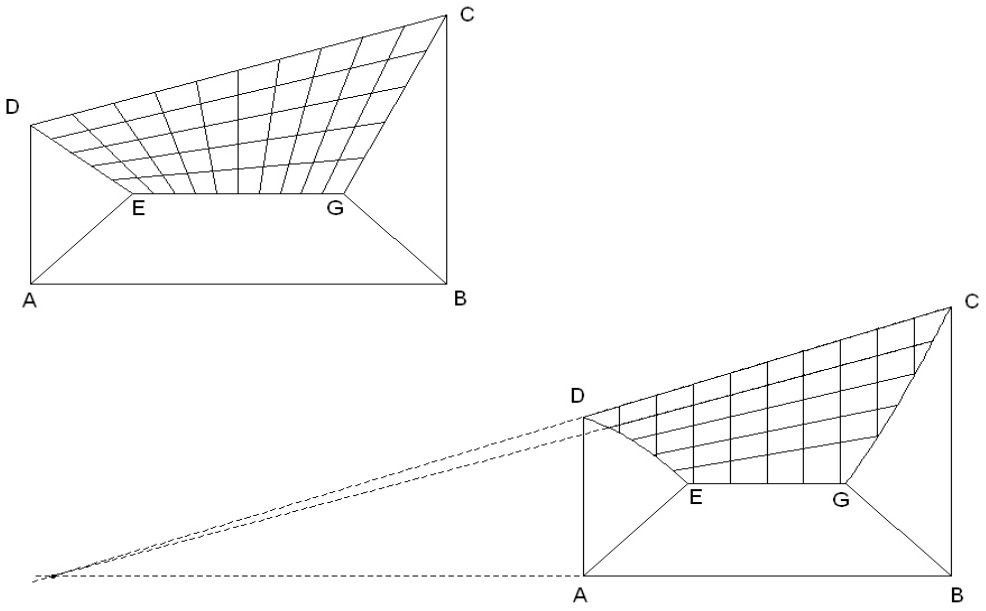


Jak jsme již ukázali, je hyperbolický paraboloid rovněž zadán dvěma podobnými bodovými řadami na mimoběžných přímkách. Podobné zobrazení zachovává dělicí poměr a tím je i dána konstrukce dalších přímek plochy. Předpokládejme, že máme dány mimoběžky ***a, b*** (přímky plochy prvního regulu) a na nich odpovídající si body (bodům ***¹A, ²A*** přímky ***a*** odpovídají body ***¹B, ²B*** přímky ***b***). Přímky ***¹A¹B***, ***²A²B*** patří druhému regulu a další přímky druhého regulu sestrojíme tak, že si úsečky ***¹A²A*** a ***¹B²B*** rozdělíme na *n* stejných dílků a odpovídající body spojíme. Na přímkách ***¹A²A*** a ***¹B²B*** je rovněž určen podobné zobrazení a tejným způsobem sestrojíme i další přímky prvního regulu. Hyperbolický paraboloid lze tedy zadat také čtyřmi body neležícími v rovině, tzv. **zborceným čtyřúhelníkem.** S tímto zadáním se nejčastěji setkáváme ve stavební praxi. Na obrázku je dán hyperbolický paraboloid v ortogonální axonometrii zborceným čtyřúhelníkem ***ABCD***, body ***B, D*** leží v π a přímka ***BD*** je rovnoběžná s osou ***y***, body ***A, C*** mají stejnou ***z***-ovou souřadnici a ***A₁ᵃC₁ᵃ*** leží na ose ***x***, ***A₁ᵃ*** splývá s počátkem. Přímky plochy obou regulů jsou sestrojeny s využitím podobných řad, je sestrojena část plochy omezená půdorysnou π, bokorysnou μ a rovinou μ´ rovnoběžnou s μ a procházející bodem ***C***. Rovina π protíná plochu Φ v hyperbole, roviny μ a μ´ v parabolách. Konstrukce těchto kuželoseček jsou provedeny bodově jako průsečíky přímek plochy s příslušnými rovinami. Přímky ***A₁ᵃC₁ᵃ*** a ***B₁ᵃD₁ᵃ*** se protínají v půdoryse vrcholu ***V*** a jsou to půdorysy přímek ***d*** a ***m*** různých regulů, které určují tečnou rovinu ve vrcholu ***V***. Osa ***o*** je rovnoběžná se souřadnou osou ***z***. Axonometrické průměty plochy obalují obrysovou parabolu plochy. Její body (body dotyku) jsou sestrojeny jako body dotyku tečných rovin kolmých k axonometrické průmětně a procházejících odpovídající přímkou. Hledáme např. obrysový bod na přímce ***x*** druhého regulu. Axonometrický průmět této přímky splývá a axonometrickým průmětem přímky ***g*** prvního regulu, různoběžné s přímkou ***x***. Sestrojíme axonometrické půdorysy obou těchto přímek (pomocí průsečíků s přímkami opačných regulů) Přímky ***g*** a ***x*** se protínají v bodě dotyku ***X*** roviny ρ kolmé k axonometrické průmětně a bod ***X*** patří obrysu. Z obrázku je zřejmý a i další název hyperbolického paraboloidu a to **sedlová plocha.**

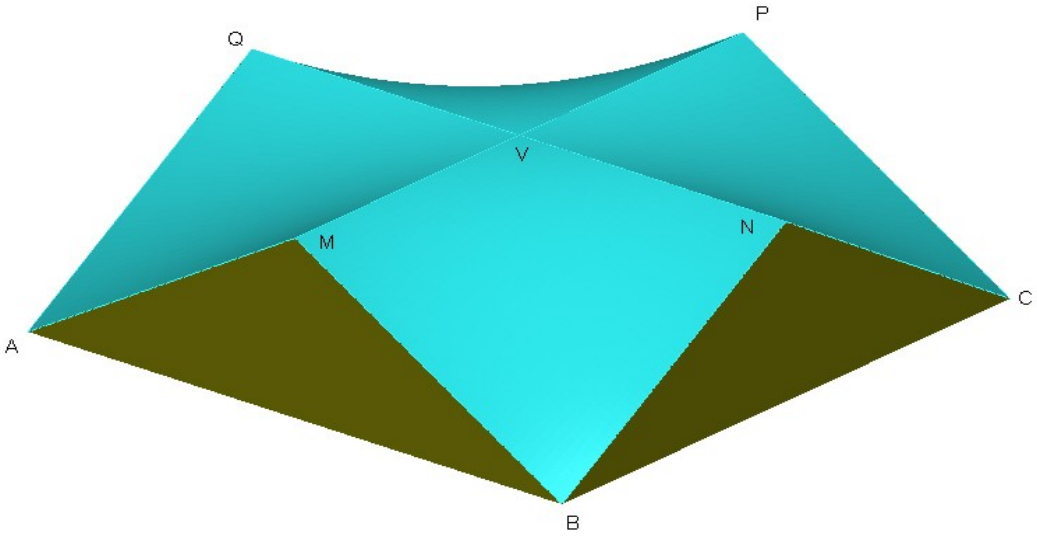


Ve stavební praxi se této plochy využívá nejčastěji k zastřešování objektů s nepravidelnými půdorysy nebo rozlehlejších objektů. Využívá se jednoduchého praktického provedení i úspory materiálu (plocha je přímková) a rovněž pozitivního estetického dojmu.

Mějme dán objekt s nepravidelným půdorysem ***ABCD***. Máme jej zastřešit s okapy ve stejné výši. Jestliže zastřešení řešíme obvyklým způsobem pomocí rovin, dostaneme hřeben ***EF***, který není vodorovný, což nepůsobí nejlepším estetickým dojmem. Řešíme to následujícím způsobem. Bodem ***E*** vedeme vodorovný hřeben ***EG***, kde ***G*** leží v rovině ***ABE***. Střecha je určena střešními rovinami ***AED, ABE, BCG*** a částí hyperbolického paraboloidu. Ten můžeme zadat dvěma způsoby. Buď zborceným čtyřúhelníkem ***EGCD*** nebo jej zadáme přímkami ***CD, EG*** a řídící rovinou s kolmou k přímce ***EG***. V prvním případě hyperbolický paraboloid protíná střešní roviny ***ADE*** a ***BCG*** po řadě v přímkách ***DE, CG***, ovšem přímky druhého regulu nejsou kolmé k hřebenu ***EG*** a praktické provedení je náročnější. V druhém případě protínají střešní roviny ***ADE*** a ***BCG*** plochu v kuželosečkách, ovšem přímky plochy druhého regulu jsou tentokrát kolmé k hřebenu ***EG***.

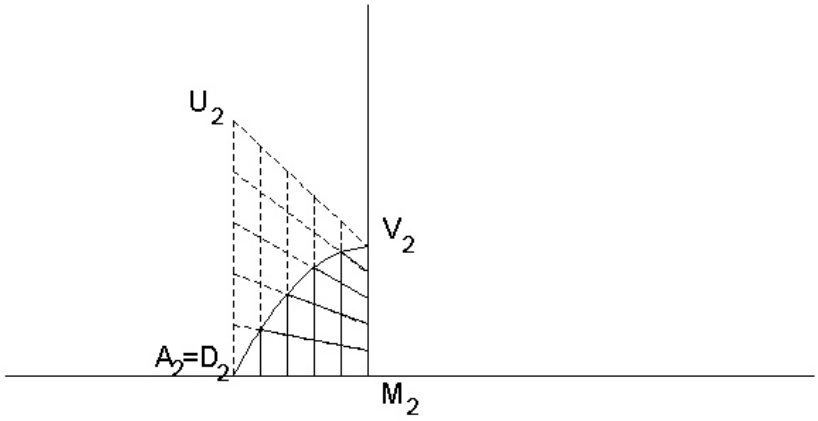


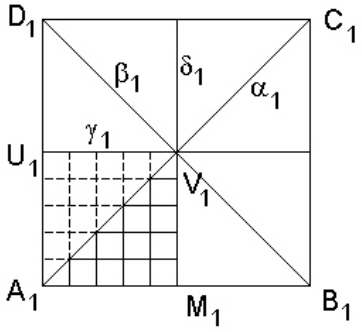
Hyperbolický paraboloid se také může využít k zastřešení obdélníkového půdorysu ***ABCD***. Využijeme čtyř hyperbolických paraboloidů. Nad stranami obdélníku sestrojíme stejně vysoké trojúhelníkové štíty ***ABM, BCN, CDP, ADQ***, úsečky ***NQ, PM*** tvoří hřebeny střechy, průsečík hřebenů označme ***V***. Hyperbolické paraboloidy jsou určeny zborcenými čtyřúhelníky ***AMVQ, BMVN, CNVP, DPVQ.***

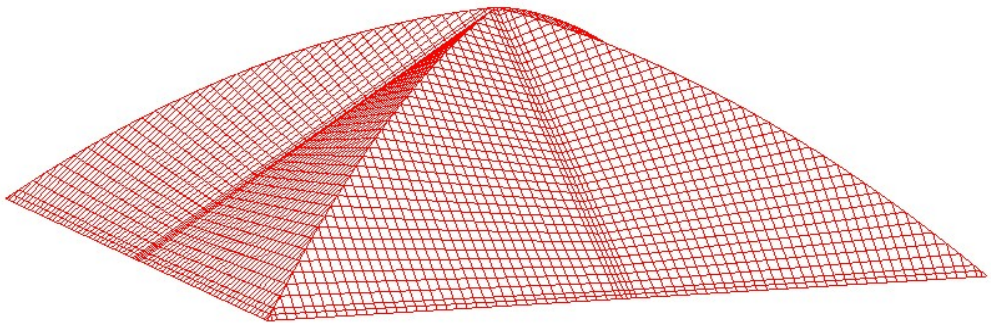


Nad čtvercovým půdorysem se používá tzv. Aymondova báň, která má výborné statické vlastnosti. Máme-li dán čtverec ***ABCD*** v půdorysně, body ***U, V*** mají různí ***z***-ové souřadnice (***U*** je výš) a půdorys V_1 je střed čtverce ***ABCD***, půdorys U_1 je střed strany ***AD***, označme ***M*** střed strany ***AB***. Sestrojíme hyperbolický paraboloid daný zborceným čtyřúhelníkem ***AMVU***. Jeho řídící roviny jsou

kolmé k π, rovina kolmá k π a procházející ***AC*** protíná tuto plochu parabole. Část Aymondovy báně tvoří ta část plochy nad trojúhelníkem $A_1M_1V_1$, tato část je osminou plochy. Celou Aymondovu báň dostaneme souměrností podle rovin α, β, γ, δ, což jsou roviny kolmé k π a procházející úhlopříčkami a středními příčkami čtverce ***ABCD***.

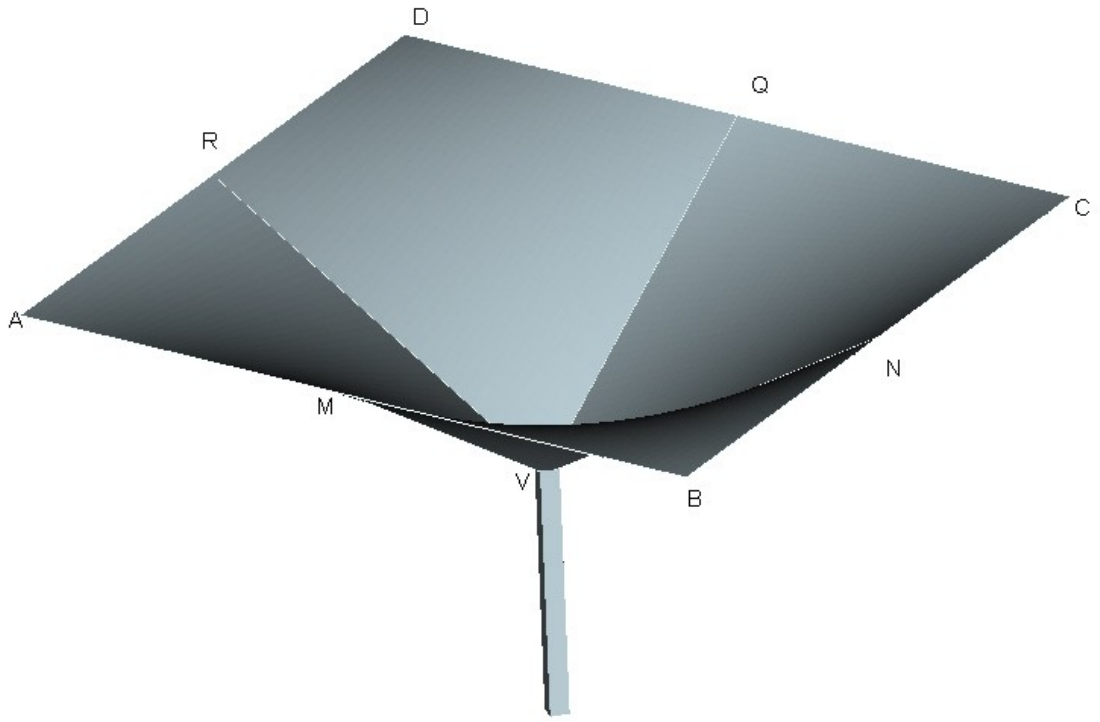






Rozlehlejší objekty zastřešujeme také následujícím způsobem. Základní stavební prvek je tvořen hyperbolickými paraboloidy nad čtvercovým půdorysem ***ABCD***. Označme ***M, N, Q, R*** středy stran čtverce ***ABCD***. Na svislé přímce procházející středem čtverce zvolme bod ***V*** (níž než body čtverce). Hyperbolické paraboloidy jsou určeny zborcenými čtyřúhelníky ***AMVR, BMVN, CNVQ,***

DQVR. Do bodu ***V*** se připojuje nosný sloup, kterým odchází dešťová voda. Tyto stavební prvky pak řadíme vedle sebe a požívají se často pro zastřešování nástupišť.



Obecné zborcené plochy

Obecná zborcená plocha Φ je množina přímek protínajících tři řídící křivky ***¹k, ²k, ³k,*** případně je průsečík s některou z křivek nahrazen dotykem s řídící plochou. Jestliže jsou řídící křivky algebraické je i plocha algebraická. Stupeň algebraické plochy je počet průsečíků obecné přímky s plochou a je závislý na stupni řídících křivek. Dá se ukázat, že pokud žádné dvě z řídících křivek ***¹k, ²k, ³k*** nemají společný bod, pak stupeň plochy Φ je $\boldsymbol{2^{\cdot 1}n^2n^3n}$, kde ***¹n, ²n, ³n*** jsou stupně řídících křivek. Mají-li některé tvořící křivky společný bod ***X***, pak ploše formálně patří i kuželová plocha s vrcholem ***X*** a řídící křivkou ***³k***. Tuto plochu nebudeme ke zborcené ploše počítat a stupeň plochy je pak nižší a je roven $\boldsymbol{2^{\cdot 1}n^2n^3n\text{-}s_{1k2k}{}^3n\text{-}s_{1k3k}{}^2n\text{-}s_{2k3k}{}^1n}$, kde $\boldsymbol{s_{ikjk}}$ je počet společných bodů křivek ***ⁱk, ʲk***. Rovněž se dá dokázat, že každá tvořící křivka je vícenásobnou křivkou plochy a její násobnost se rovná součinu stupňů obou zbývajících křivek.

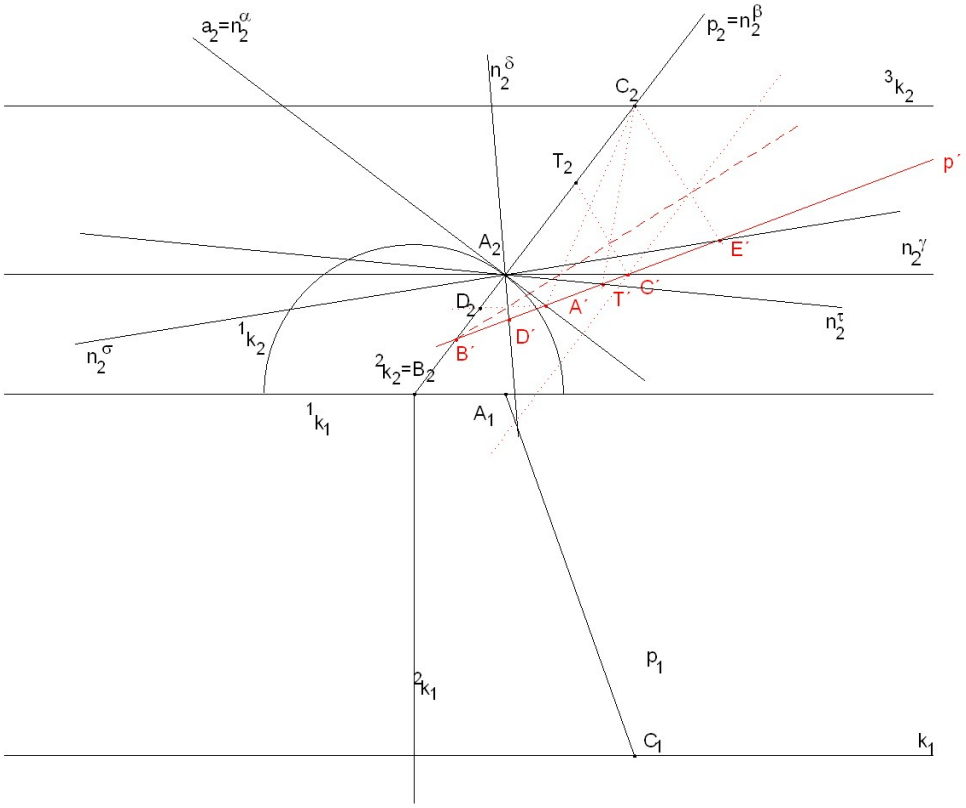
Víme, že pro regulární přímky zborcené plochy platí Chaslesova věta. Pomocí ní sestrojujeme tečné roviny v bodech regulární přímky.

Nechť Φ je obecná zborcená plocha zadaná řídícími křivkami ***¹k, ²k, ³k*** a ***p*** tvořící přímka plochy, která křivky ***¹k, ²k, ³k*** protíná po řadě v bodech ***A, B, C***. Sestrojme v bodech ***A, B, C*** tečny ***a, b, c*** ke křivkám ***¹k, ²k, ³k***. Tyto tečny spolu s přímkou ***p*** určují v bodech ***A, B, C*** tečné roviny α, β, γ

zborcené plochy Φ procházející přímkou ***p***. Je-li ***D*** další bod přímky ***p***, pak pro tečnou rovinu δ v bodě ***D*** platí ***(ABCD)***=(αβγδ).

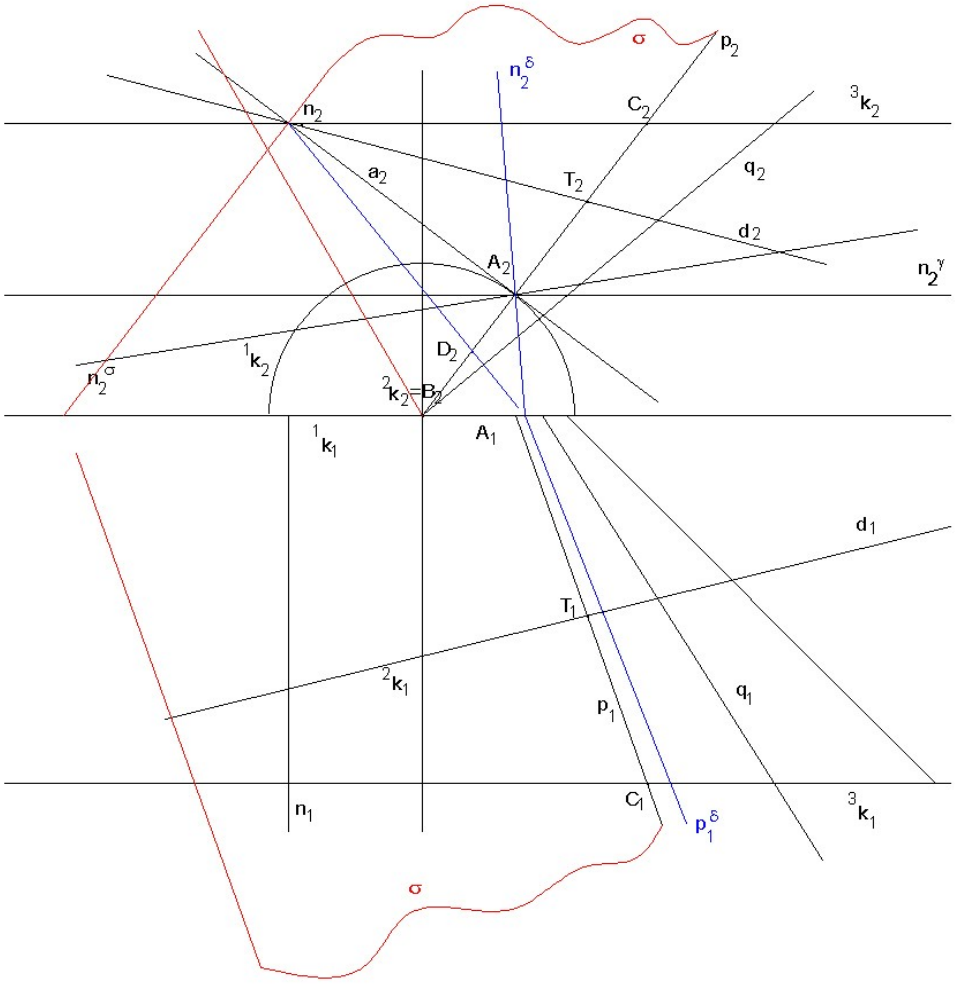
Př. Plocha Montpeliérského oblouku je určena půlkružnicí $^{1}\boldsymbol{k}$ ležící v ν, přímkou $^{2}\boldsymbol{k}$ kolmou k ν a přímkou $^{3}\boldsymbol{k}$ rovnoběžnou se základnicí. V bodě ***T*** regulární přímky ***p*** plochy Φ určete tečnou rovinu τ, k tečné rovině δ procházející přímkou ***p*** určete bod dotyku ***D*** a sestrojte asymptotickou rovinu σ přímky ***p***.

Přímka ***p*** protíná všechny řídící křivky, proto nárys $\boldsymbol{p_2}$ musí procházet bodem $\boldsymbol{k_2}$. Pomocí průsečíků s křivkami $^{1}\boldsymbol{k}$, $^{3}\boldsymbol{k}$ určíme půdorys přímky ***p***. Označme ***A, B, C*** po řadě průsečíky přímky ***p*** s tvořícími křivkami $^{1}\boldsymbol{k}$, $^{2}\boldsymbol{k}$, $^{3}\boldsymbol{k}$. Tečná rovina α v bodě ***A*** je určena přímkou ***p*** a tečnou ***a*** k půlkružnici $^{1}\boldsymbol{k}$ v bodě ***A***, tečná rovina β v bodě ***B*** je určena přímkami ***p*** a $^{2}\boldsymbol{k}$, a tečná rovina γ v bodě ***C*** je určena přímkami ***p***, $^{3}\boldsymbol{k}$. Určíme nárysné stopy rovin α, β, γ. Platí $\boldsymbol{n_2^{\alpha}=a_2}$, $\boldsymbol{n_2^{\beta}=p_2}$, $\boldsymbol{n_2^{\gamma}}$ je rovnoběžná s ***x*** a všechny nárysné stopy prochází bodem $\boldsymbol{A_2}$. Podle Chaslesovy věty platí pro tečnou rovinu v bodě ***T*** pro dvojpoměry $\boldsymbol{(ABCT)=(A_2B_2C_2T_2)}$=(αβγτ)=$(\boldsymbol{n_2^{\alpha}n_2^{\beta}n_2^{\gamma}n_2^{\tau}})$. Přímku $\boldsymbol{n_2^{\tau}}$ svazku o středu $\boldsymbol{A_2}$ určíme doplněním projektivity dvou dvou nesoumístných bodových řad. Protněme svazek přímek o středu $\boldsymbol{A_2}$ libovolnou přímkou ***p´*** neprocházející středem svazku a označme ***A´, B´, C´*** průsečíky přímky ***p´*** po řadě s přímkami $\boldsymbol{a_2, p_2, n_2^{\gamma}}$. Řady $\boldsymbol{p_2}$ a ***p´*** jsou projektivní, bodům $\boldsymbol{A_2, B_2, C_2}$ odpovídají body ***A´, B´, C´***. Sestrojíme obraz ***T´*** bodu $\boldsymbol{T_2}$ (doplněním projektivity např. využitím Pappova axiomu) a nárysná stopa tečné roviny τ je určena body $\boldsymbol{A_2}$ a ***T´.*** Obráceně, jestliže známe nárysnou stopu $\boldsymbol{n_2^{\delta}}$ tečné roviny procházející přímkou ***p***, určíme průsečík ***D´*** této stopy s přímkou ***p´*** a obraz $\boldsymbol{D_2}$ bodu ***D´.*** $\boldsymbol{D_2}$ je pak nárys bodu dotyku. Asymptotická rovina σ je tečná rovina v nevlastním bodě, takže na ***p´*** určíme obraz ***E´*** nevlastního bodu přímky $\boldsymbol{p_2}$ a nárysná stopa roviny σ je určena body $\boldsymbol{A_2}$ a ***E´***.



Jestliže dvě zborcené plochy Φ a Φ´ mají společnou přímku ***p***, pak podle Chaslesovy věty mají společné tečné roviny procházející přímkou ***p*** a plochy Φ a Φ´ se podél ***p*** dotýkají. Toho využijeme k tomu, že některé konstrukce na obecných zborcených plochách nahradíme konstrukcemi na zborcených kvadrikách. Jsou-li ***^{1}k, ^{2}k, ^{3}k*** řídící křivky plochy Φ, ***p*** tvořící přímka této plochy, která řídící křivky protíná v bodech ***A, B, C*** a ***a, b, c*** tečny křivek ***^{1}k, ^{2}k, ^{3}k***, v bodech ***A, B, C***. Podle Chaslesovy věty jsou přímky ***a, b, c*** mimoběžné a určují tak zborcenou kvadriku Ω, která se plochy Φ dotýká podél přímky ***p***. Konstrukci tečných rovin zborcené plochy je možno převést na konstrukci tečných rovin dotykové zborcené kvadriky.

Přímky ***a, ^{2}k, ^{3}k*** určují dotykový zborcený hyperboloid Ω podél přímky ***p***. Nárysy přímek druhého regulu tvoří svazek o středu ***^{2}k$_2$***, nárysy přímek prvního regulu tvoří svazek o středu ***n$_2$***, který je průsečíkem přímek ***a$_2$*** a ***^{3}k$_2$***. Tečná rovina τ v bodě ***T*** je určena dvěma přímkami ***p, d*** různých regulů. Sestrojíme přímku ***d*** prvního regulu. Podobně pro konstrukci bodu dotyku dané tečné roviny δ procházející přímkou ***p*** či pro sestrojení asymptotické roviny použijeme známých konstrukcí na zborceném hyperboloidu.

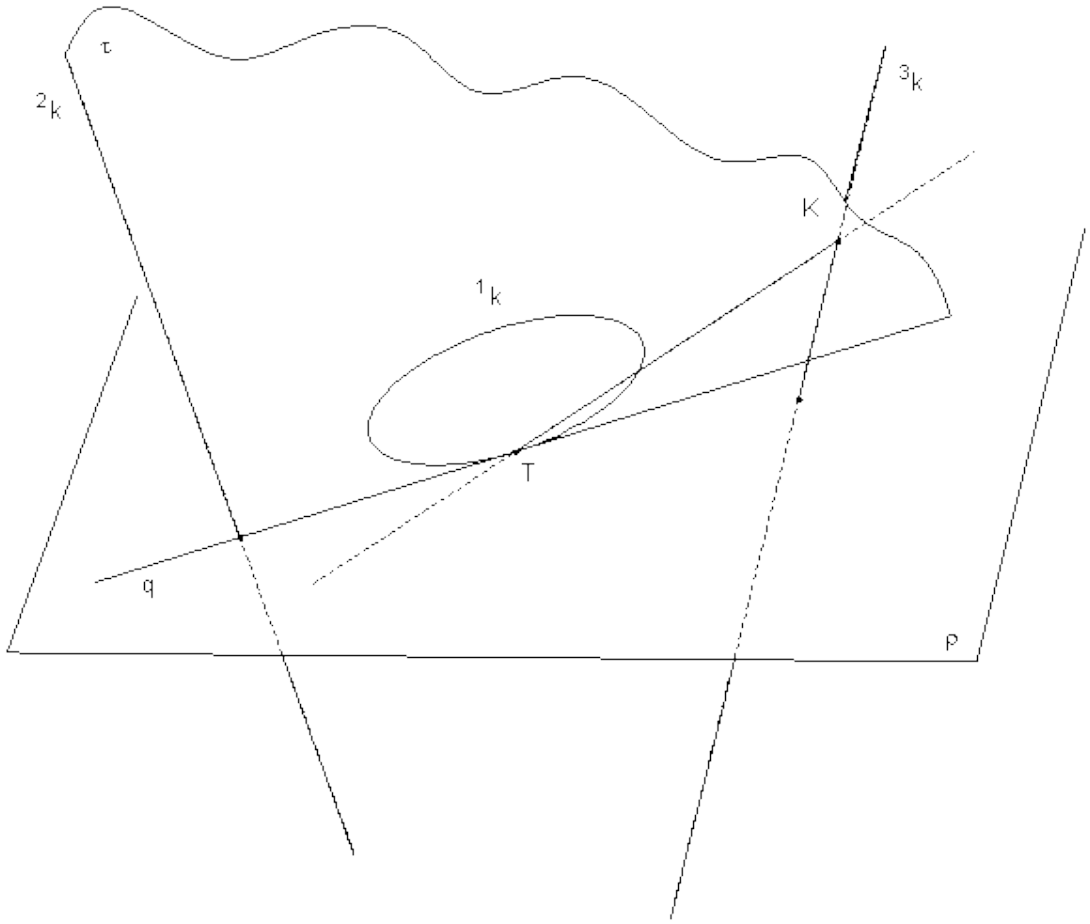


Jestliže v rovinách α=***(a,p)***, β=***(b,p)***, γ=***(c,p)*** zvolíme přímky ***a´, b´, c´*** procházející body ***A, B, C,*** jsou opět mimoběžné a určují rovněž zborcenou kvadriku, která se dotýká plochy Φ podél přímky ***p***. Existuje nekonečně mnoho zborcených kvadrik, které se dotýkají plochy Φ podél přímky ***p***. Pro konstrukce volíme takovou kvadriku, jejíž některé přímky mají vzhledem k průmětnám speciálnější polohu, abychom zjednodušili konstrukce.

Ke každé obecné přímce zborcené plochy Φ existuje asymptotická rovina. Protože množina přímek plochy je jednoparametrická, je jednoparametrická i množina asymptotických přímek plochy Φ a obaluje rozvinutelnou plochu Σ, tzv. **asymptotickou rozvinutelnou plochu** zborcené plochy Φ. Například v případě zborceného hyperboloidu se jedná o asymptotickou kuželovou plochu, asymptotické roviny hyperbolického paraboloidu tvoří dva svazky rovin.

Na obecné zborcené ploše mohou existovat kromě přímek regulárních i přímky torzální. Je-li ***p*** torzální přímka zborcené plochy Φ, pak existuje rovina τ (tzv. **torzální rovina**), která se Φ dotýká podél celé přímky ***p***. Ostatní roviny procházející přímkou ***p*** jsou rovněž tečné, všechny se plochy dotýkají v jediném bodě ***K*** přímky ***p***, tzv. **kuspidálním bodě**. Soumezná přímka k přímce ***p*** (nekonečně blízká k ***p***) je s ***p*** mimoběžná, pokud se jedná o regulární přímku a různoběžná v případě torzální přímky. Pak ***p*** protíná v kuspidálním bodě a spolu s ***p*** určuje torzální rovinu.

Předpokládejme, že je plocha Φ zadána rovinnou křivkou ***[1]k***, a dvěma mimoběžnými přímkami ***[2]k***, ***[3]k***, které neleží v rovině křivky ***[1]k*** a neprotínají ***[1]k***. Ukážeme si konstrukci torzálních přímek a rovin. Přímkou ***[2]k*** proložíme rovinu τ, jejíž průsečnice s rovinou křivky ***[1]k*** se dotýká křivky ***[1]k*** v bodě ***T***. Průsečík ***K*** roviny τ a křivky ***[3]k*** je kuspidální bod ***K*** přímky ***TK***, přímka ***TK*** je torzální a rovina τ je torzální. Obdobně pro přímku ***[3]k***.



Mez vlastního stínu při rovnoběžném osvětlení plochy Φ je množina bodů dotyku tečných světelných rovin této plochy. Mohou nastat některé speciální případy. Je-li ***p*** regulární přímka rovnoběžná se směrem osvětlení, patří přímka ***p*** mezi vlastního stínu. Je-li ***p*** torzální přímka a tečná světelná rovina je rovina torzální, pak opět ***p*** patří mezi vlastního stínu. Není-li světelná rovina torzální,

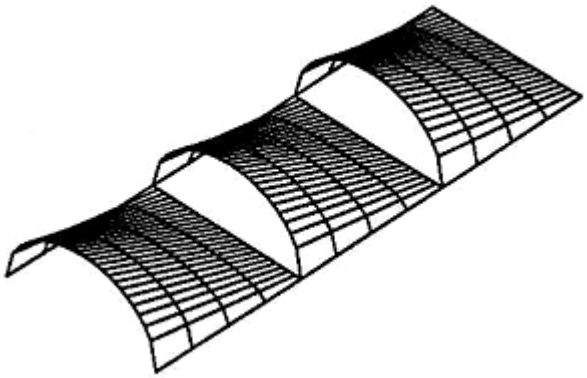
pak se dotýká plochy v kuspidálním bodě. Mez vlastního stínu tedy prochází všemi kuspidálními body plochy.

Jestliže je zborcená plocha zadána řídícími křivkami ^1k, ^2k, ^3k, kde např. ^3k je nevlastní přímka, pak se plocha nazývá **cylindroid** nebo také **Catalanova plocha.** Jestliže je navíc např. ^2k vlastní přímka, pak se plocha nazývá **konoid.** Další pojmenování konoidu se pak řídí křivkou ^1k (např. eliptický konoid apod.) Navíc, je-li ^2k kolmá na nevlastní ^3k(tj. na řídící rovinu) nazývá se konoid **přímý** v opačném případě **šikmý** nebo **kosý.**

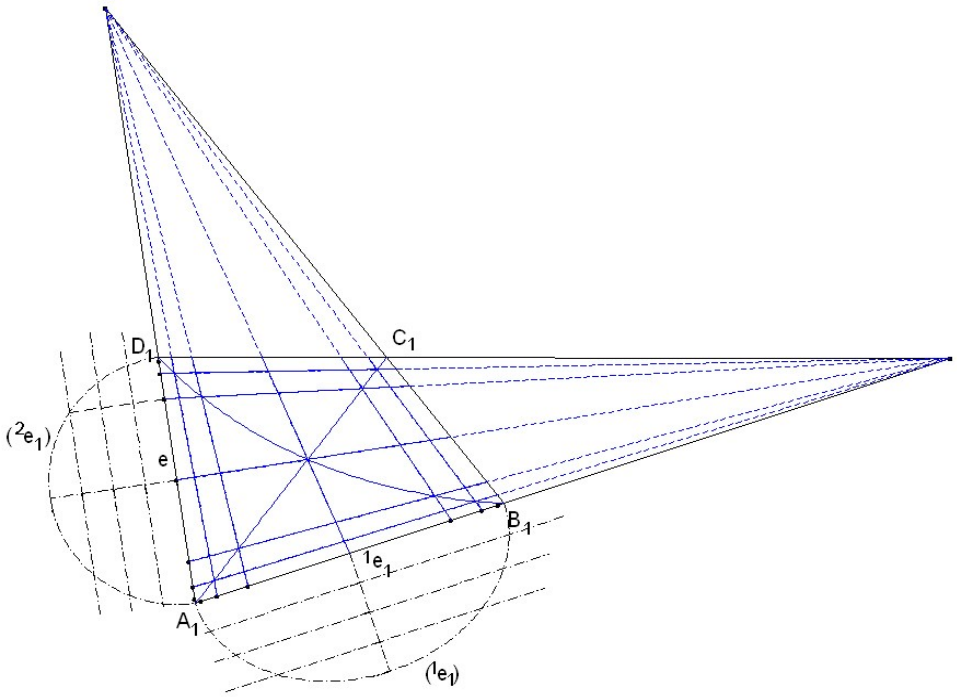
Užití zborcených ploch

Zborcené plochy se užívají především ve stavebnictví, protože jsou konstrukčně jednoduché (přímkami se spojují tři řídící útvary), mají výborné statické vlastnosti (soumezné tvořící přímky jsou mimoběžné), působí lehkým a vzdušným dojmem, je na ně nevelká spotřeba materiálu.

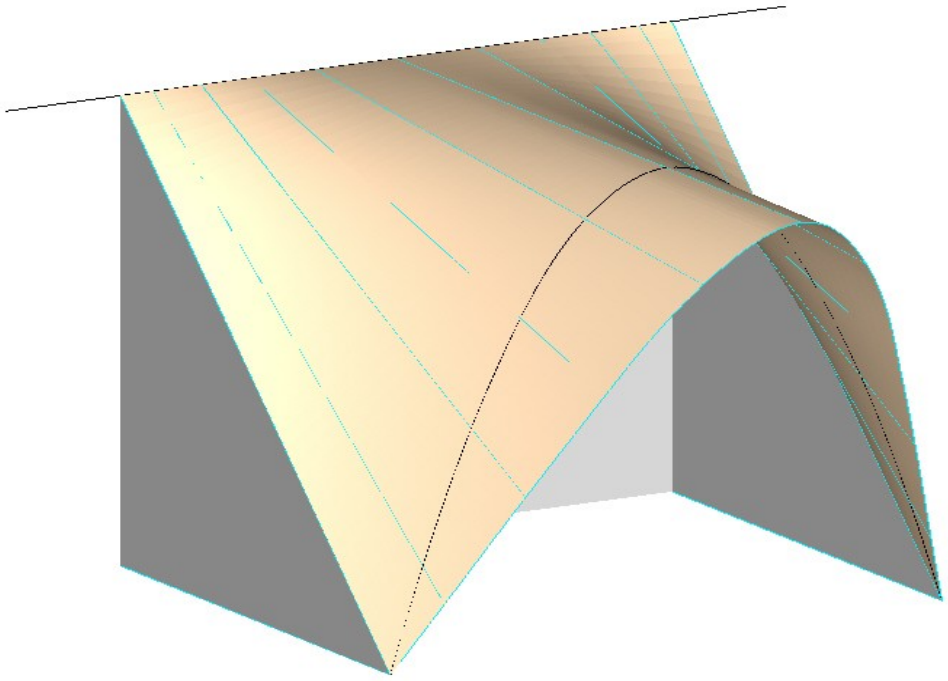
Z kuželosečkových konoidů se přímého **kruhového konoidu** užívá na tzv. pilových střechách nad továrními halami, kde je tak umožněno dostatečné osvětlení pracoviště. Roviny řídících kružnic jsou svislé nebo mírně nakloněné (v případě, kdy požadujeme, aby střecha propouštěla více světla), vlastní řídící přímky jsou vodorovné (jedná se o přímý konoid, takže řídící rovina je kolmá k řídící přímce). V některých případech se místo kružnice užívá řídící parabola a dostáváme pak **parabolický konoid**. Kruhový konoid se dále využívá jako opěrná zeď vodní nádrže, skladiště sypkých hmot apod. (Tam, kde na stěny působí velké tlaky, které se na konoidech rozkládají.)



Zastřešení nepravidelného čtyřúhelníkového půdorysu je také možno provést pomocí dvou **eliptických konoidů**, dostáváme tzv. **křížovou klenbu**. Předpokládejme, že máme dán půdorys ***ABCD***. Dva eliptické konoidy jsou určeny řídícími elipsami ^1e, ^2e ve svislých rovinách procházejících ***AB, BC*** a jejich druhé osy jsou stejně velké. Řídící rovina obou konoidů je π a řídící přímky jsou svislé a prochází průsečíky přímek ***AD*** a ***BC*** či ***AB*** a ***CD***. Vodorovné roviny tedy protínají oba konoidy v přímkách, toho využijeme při konstrukci jejich průniku a řezu svislými rovinami procházejícími přímkami ***AC, BD***.

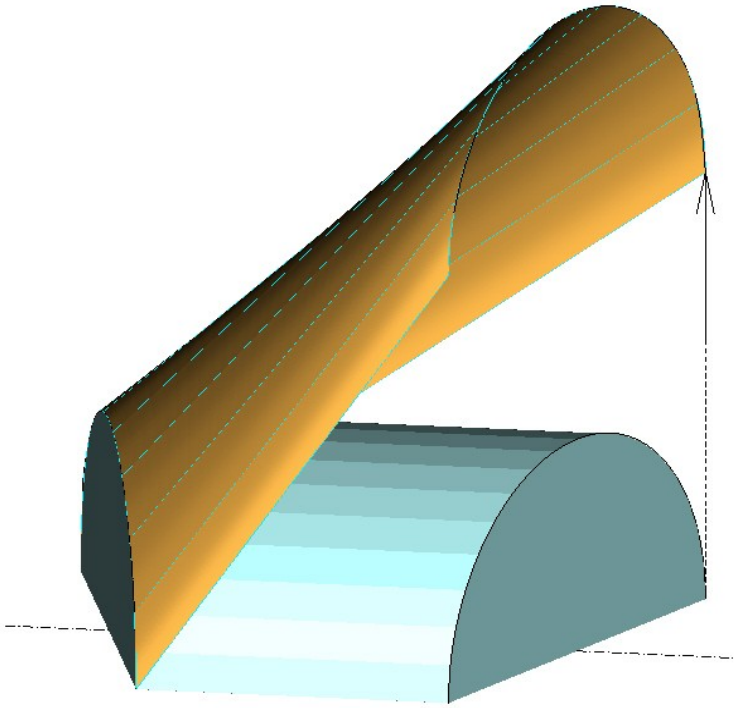


Přímý parabolický konoid se dá také využít ke chránění vchodu do budovy, je určen parabolou ve svislé rovině, řídící přímka je vodorovná, řídící rovina je svislá, kolmá k rovině paraboly. Na obrázku je konoid omezen šikmou rovinou.

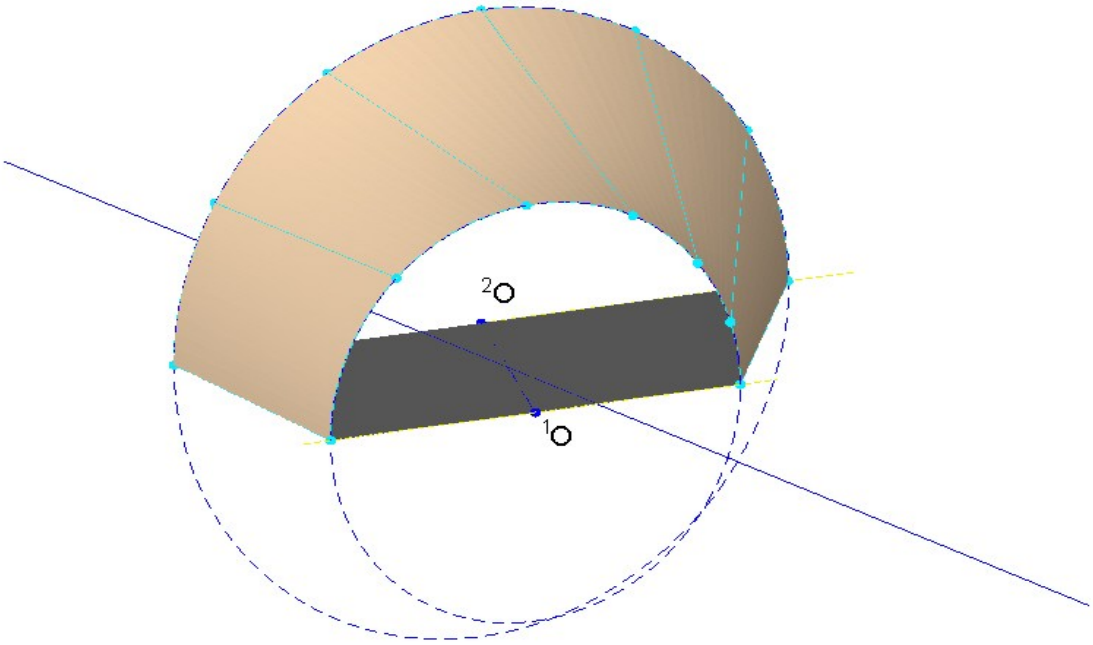


Plocha klenby nad schodištěm je částí Catalanovy plochy nazývané **Freziérův cylindroid**. Řídící útvary jsou zadány následujícím způsobem. Mějme rotační válcovou plochu s osou v π a

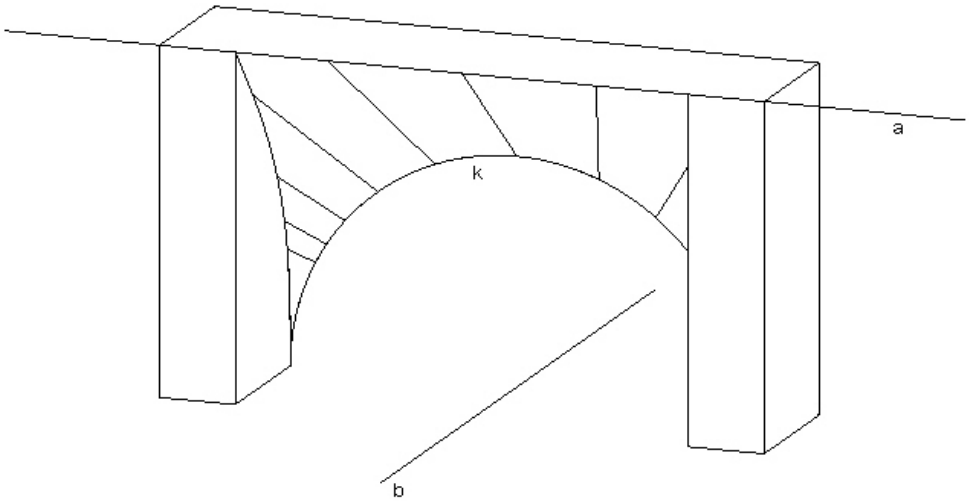
rovnoběžnou s ν (část válcové plochy nad π), uvažujme dva eliptické řezy ***¹e, ²e´*** v rovinách kolmých k π a elipsu ***²e´*** vysuňme svislým směrem do elipsy ***²e***. Křivky ***¹e, ²e´*** jsou řídící křivky a řídící rovina je ν.



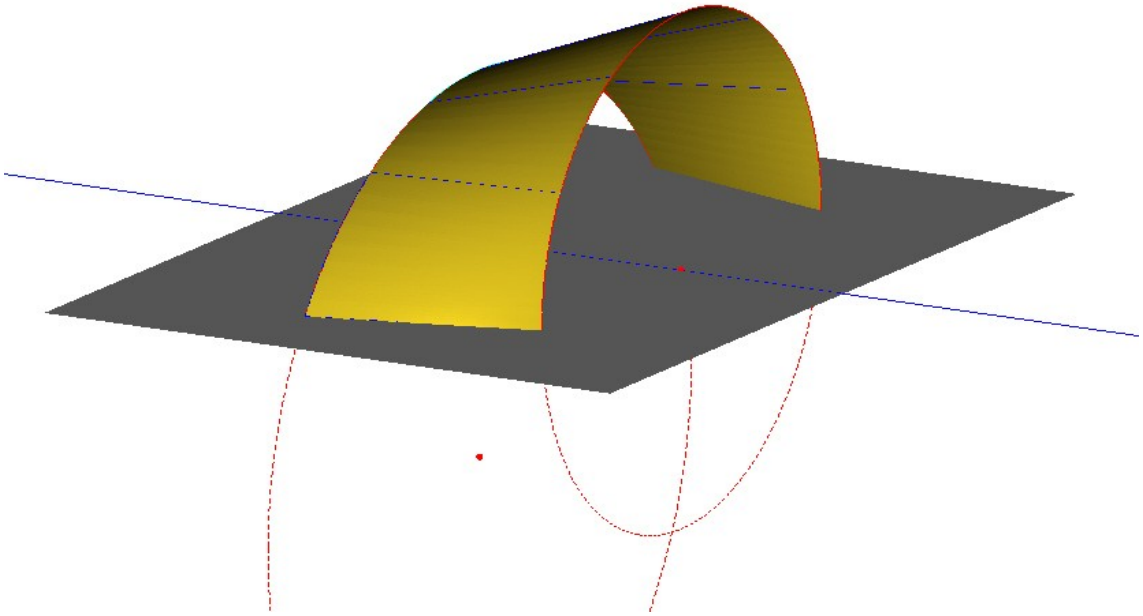
Pro šikmý podjezd železniční trati se využívá **plochy šikmého průchodu**.Řídící křivky jsou kružnice ležící ve svislých rovnoběžných rovinách (spojnice ***¹O²O*** jejich středů není k těmto rovinám kolmá). Řídící přímka prochází středem úsečky ***¹O²O*** kolmo k rovinám kružnic. V praxi se většinou opět bere jen část plochy určená půlkružnicemi.



Řídící kružnici a dvěma přímkami je zadána plocha **Montpeliérského oblouku.** Používá se jí jako klenby při přechodu válců do hranolů nebo jako vyrovnávací plochy. Jedna řídící přímka je rovnoběžná s rovinou řídící kružnice, druhá řídící přímka je kolmá k rovině řídící kružnice a prochází středem řídící kružnice.



Podobné využití jako Montpeliérský oblouk má i **Marseillský oblouk**, který je zadán dvěma řídícími kružnicemi v rovnoběžných rovinách a řídící přímkou procházející středem jedné řídící kružnice kolmo k její rovině.

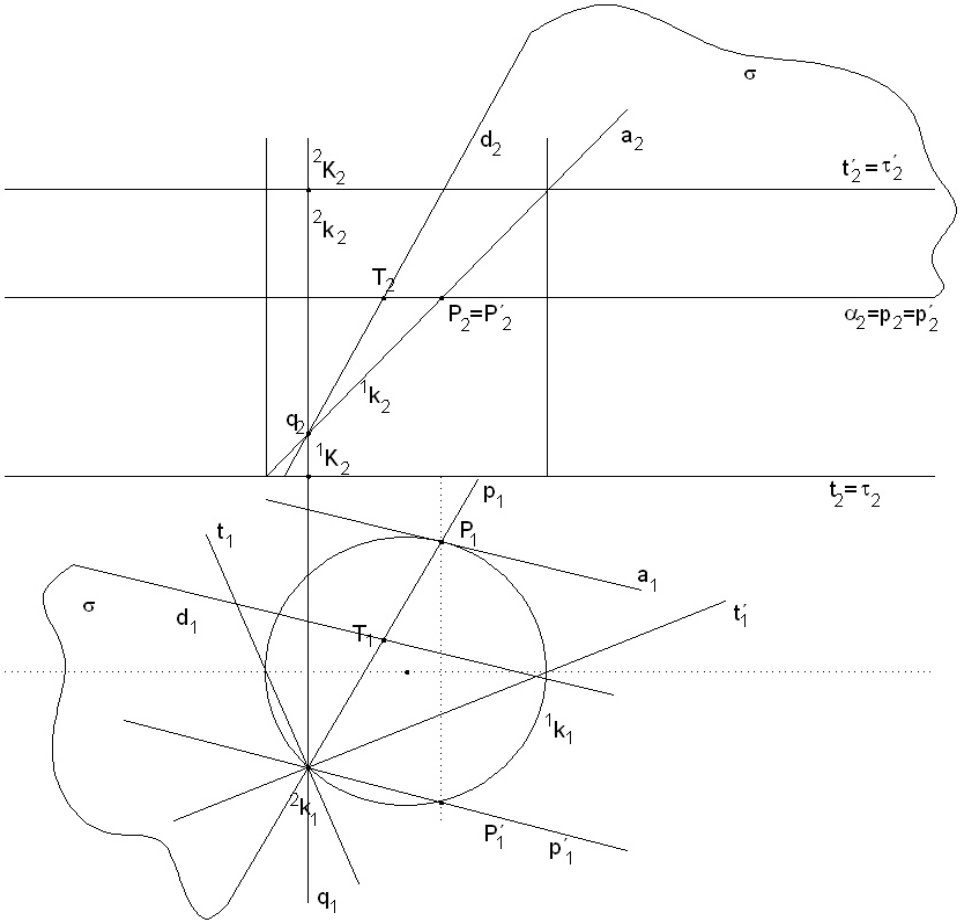


Pro konstrukci střechy nad kruhovým půdorysem je možno využít tzv. **helmice** (u nás známá Štramberská trúba). Plocha je dána řídící kružnicí v půdorysně a dvěma navzájem kolmými přímkami, jejichž půdorysy procházejí středem kružnice.

Plückerův konoid a šikmý kulový konoid

Plückerův konoid je zborcená plocha daná elipsou ***¹k*** ležící na rotační válcové ploše, povrchovou přímkou ***²k*** této rotační válcové plochy a řídící rovinou kolmou k ***²k.*** Je to tedy přímý eliptický konoid. Zobrazíme Plückerův konoid v Mongeově promítání, osa rotační válcové plochy je kolmá k π, rovina elipsy ***¹k*** je kolmá k ν, řídící rovina je pak π. Protože se dvě řídící křivky protínají, patří ploše formálně i rovina ξ, která prochází průsečíkem křivek ***¹k***, ***²k*** rovnoběžně s π. Tuto rovinu s plochy vyjímáme (ponecháme pouze přímku ***q*** kolmou k ν). a podle dříve uvedeného vztahu je plocha třetího stupně. Přímky plochy jsou rovnoběžné s π, v každé rovině α rovnoběžné s π, která protíná elipsu ***¹k*** ve dvou různých bodech ***P, P´***, leží dvě tvořící přímky ***p, p´*** plochy Φ. Torzální roviny $^1\tau$, $^2\tau$ jsou roviny rovnoběžné s π ($^1\tau$ splývá s π), které se dotýkají elipsy ***¹k*** V torzálních rovinách τ, τ ´ leží torzální přímky ***t, t´.*** Průsečíky ***¹K, ²K*** torzálních rovin s přímkou ***²k*** jsou kuspidální body. Půdorysy přímek vytvářejí svazek o středu ***¹k₁***, nárysy vyplní pás určený přímkami ***t₂, t´₂.***

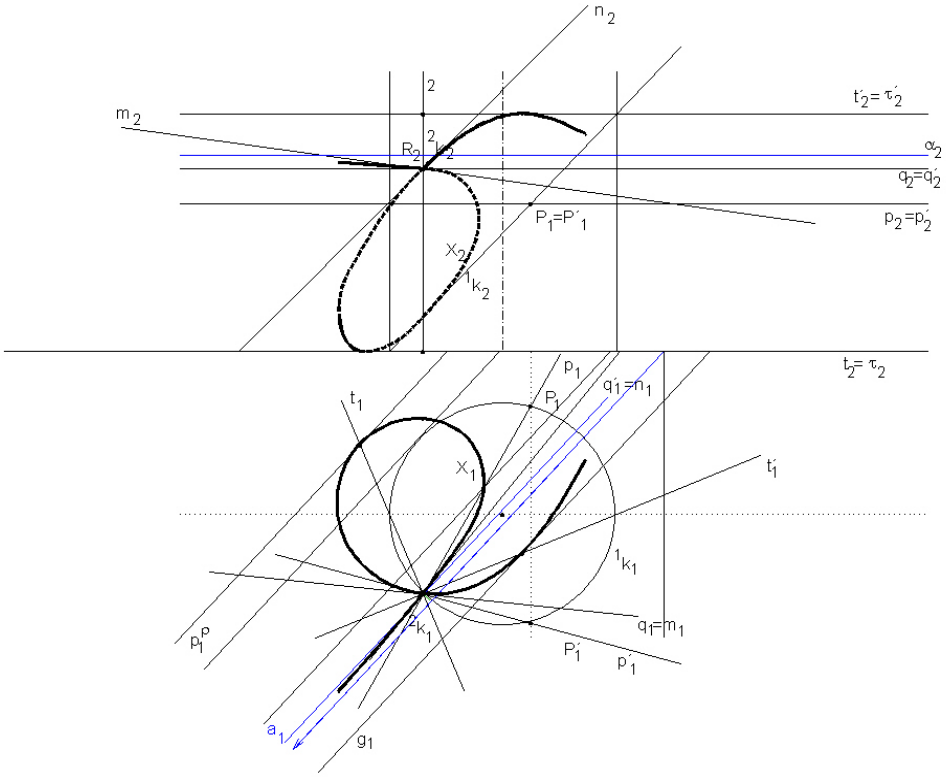
Tečnou rovinu σ v bodě ***T*** přímky ***p*** sestrojíme pomocí dotykové kvadriky Ω. ***p*** protíná ***¹k*** v bodě ***P***, v něm sestojíme tečnu ***a*** ke ***¹k***. Kvadrika je pak určena přímkami ***a, ²k*** a nevlastní přímkou roviny π, tj. je to hyperbolický paraboloid. Podle předchozího sestrojíme tečnou rovinu tohoto paraboloidu v bodě ***T***. Asymptotická rovina přímky ***p*** je rovnoběžná s π.



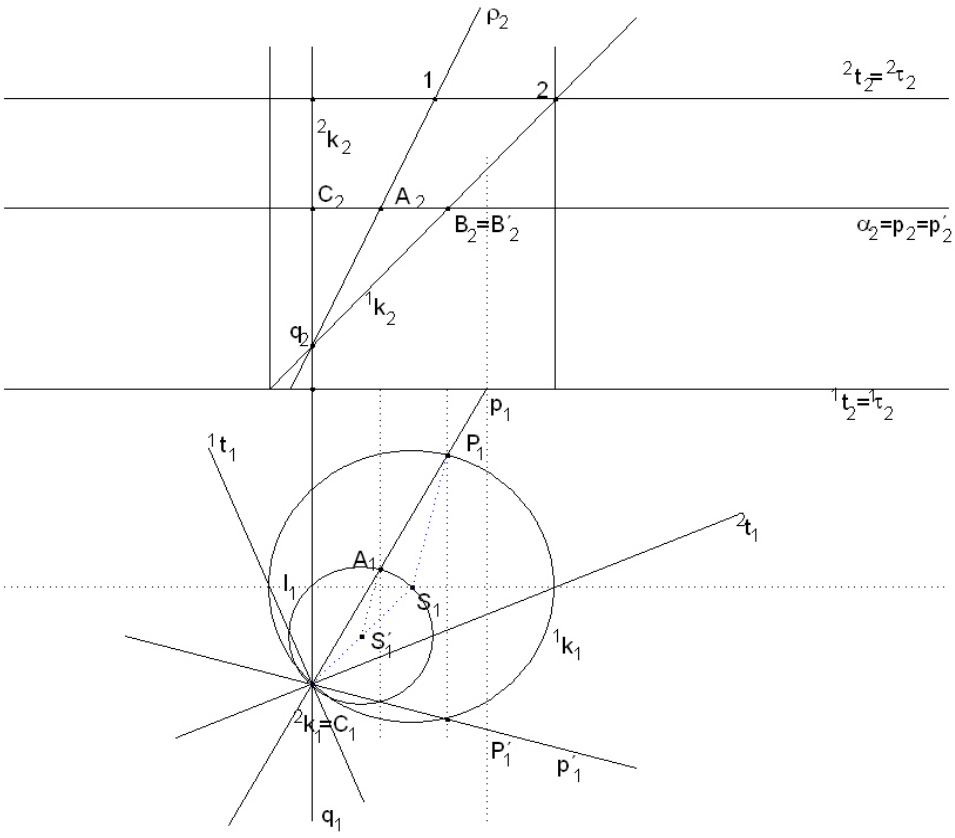
Řez Plückerova konoidu rovinou se provádí opět bodově jako množina průsečíků přímek plochy s rovinou řezu. Nejprve sestrojíme řez rovinou, která neobsahuje přímku plochy. Označme ***R*** průsečík roviny r řezu s přímkou ***²k.*** Leží-li mezi kuspidálními body je dvojnásobným bodem řezu, splývá-li s kuspidálním bodem je to bod vratu řezu a leží-li vně úsečky tvořené kuspidálními body je křivka řezu regulární (tj. bez singulárních bodů).

Obecný bod ***X*** řezu sestrojíme jako průsečík přímky ***p*** plochy procházející bodem ***X*** a roviny ρ. Proložíme-li přímkou ***p*** tečnou rovinu τ v bodě ***X*** je průsečnice roviny τ a ρ tečnou řezu v bodě ***X.*** Bod ***R*** je v tomto případě dvojnásobným bodem řezu, prochází jím přímky ***q, q´*** plochy. Tečné roviny plochy v bodě ***R*** jsou určeny přímkami ***q, q´*** a přímkou ***²k,*** tj. λ=***(²k,q)***, μ=***(²k,q´)*** Průsečnice roviny ρ s rovinami λ, μ jsou tečny ***m, n*** řezu v bodě ***R***. Torzální roviny protínají rovinu řezu v přímkách $\boldsymbol{p}^{\rho}$ a ***g***. Křivka řezu se těchto přímek dotýká v jejich průsečících s torzálními přímkami. Přímka ***a*** konoidu rovnoběžná s rovinou ρ řezu protne rovinu v nevlastním bodě, asymptotická rovina α přímky ***a*** protne rovinu řezu v asymptotě řezu.

Půdorysy všech přímek plochy jsou viditelné (tvoří svazek), proto je půdorys řezu celý viditelný. Viditelnost v náryse ovlivňuje to, že formálně ploše patří i rovina ξ rovnoběžná s π a procházející průsečíkem křivek ***¹k***, ***²k*** Viditelnost v náryse určíme následujícím způsobem. Bodem ***X*** řezu proložíme rovinu β rovnoběžnou s π. Ta protíná konoid v přímkách ***p, p´***. Bodem ***X*** vedeme druhou promítací přímku a její průsečík s přímkou plochy, na níž neleží bod ***X,*** označíme ***X´***. Viditelný je ten z bodů ***X, X´,*** který je dál od nárysny.

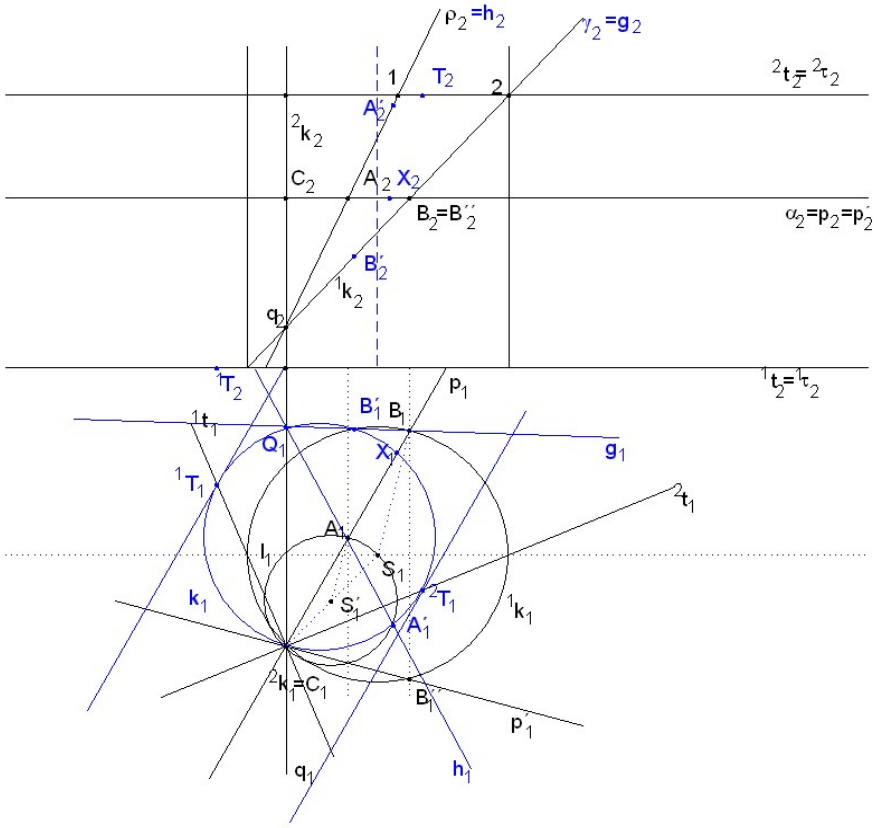


Obsahuje-li rovina ρ řezu přímku ***q*** konoidu, pak se řez rozpadá na přímku ***q*** a kuželosečku ***l*** (plocha je 3. stupně.) Nejprve sestrojme řez rovinou ρ procházející přímkou ***q*** a kolmou k ν. Nárysem kuželosečky ***l*** je úsečka. Je-li ***p*** přímka plochy Φ, pak její průsečík ***A*** s rovinou ρ patří kuželosečce ***l***. Označme ***B, C*** průsečíky přímky ***p*** s ^{1}k a ^{2}k. Označme ***1*** průsečík ρ_2 a $^{2}t_2$, a ***2*** průsečík $^{1}k_2$ a $^{2}t_2$. Platí $IC_1B_1I:IC_1A_1I=IC_2B_2I:IC_2A_2I=I^2K_22I:I^2K_21I$=konst. Půdorysy A_1 bodů ***A*** tedy vytvářejí kružnici l_1 stejnolehlou s $^{1}k_1$ o středu stejnolehlosti $C_1=^{2}k_1$. Kuželosečka ***l*** je proto elipsa. Středu S_1 kružnice $^{1}k_1$ v této stejnolehlosti odpovídá střed kružnice $S´_1$ kružnice l_1.

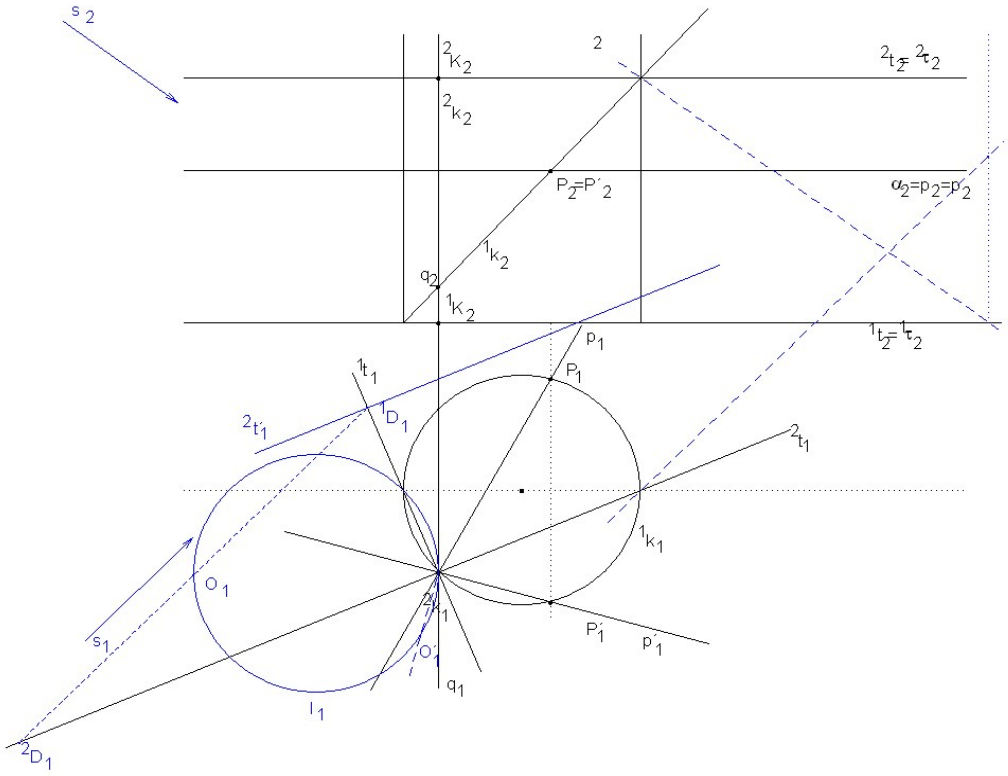


Nyní nechť je rovina σ procházející přímkou ***p*** plochy v obecné poloze, řez se rozpadá na přímku ***p*** kuželosečku ***k***. Rovinu řezu zadáme přímkou ***p*** a bodem ***Q*** na přímce ***q***. Sestrojíme-li průsečnice roviny σ řezu s rovinami procházejícími přímkou ***q*** konoidu kolmou k ν a určíme průsečíky těchto průsečnic s plochou Φ, dostáváme body kuželosečky ***k.*** Označme ***g*** průsečnici roviny γ (rovina elipsy ***1k***) s rovinou σ. Přímka ***g*** prochází body ***Q, B***, kde ***B*** je průsečík přímky ***p*** a elipsy ***¹k***. Rovina γ obsahuje přímky ***g, q***, protíná plochu Φ v elipse ***¹k***, proto kuželosečce ***k*** patří kromě bodu ***Q*** i bod ***B´***, druhý průsečík přímky ***g*** s elipsou ***¹k***. Podobně pro rovinu ρ obsahující přímku ***q*** a kuželosečku ***l***, průsečnice ***h*** roviny ρ a σ prochází body ***Q, A***, kuželosečce ***k*** patří kromě bodu ***Q*** i druhý průsečík ***A´*** přímky ***h*** s elipsou ***l***. V půdoryse užijeme vlastností obvodových úhlů kružnice ***¹k₁***. Dostáváme následující vztahy ***l<Q₁B´₁C₁l=½l<B₁S₁C₁l; l<Q₁A´₁C₁l=l<A₁A´₁C₁l=½l<A₁S´₁C₁l***. Z rovnosti úhlů ***B₁S₁C₁*** a ***A₁S´₁C₁*** dostáváme rovnost úhlů ***Q₁B´₁C₁*** a ***Q₁A´₁C₁*** a tedy půdorysem kuželosečky ***k*** je kružnice ***k₁***. (Nárys ***k*** není v obrázku sestrojen.)Snadnou konstrukci kružnice ***k₁*** získáme po odvození některých jejích vlastností. Nechť ***p´*** je přímka plochy Φ, pro kterou platí ***p₂=p´₂***. Označme ***B´´*** průsečík přímky ***p´*** a elipsy ***¹k***. Platí ***l<B₁B´´₁C₁l =½l<B₁S₁C₁l.*** Protože ***B₁B´´₁*** je rovnoběžné s ***Q₁C₁*** jsou úhly ***B₁B´´₁C₁*** a ***Q₁B´₁C₁*** stejné, úhel ***Q₁B´₁C₁*** je úsekový a přímka ***p´₁*** je tedy tečnou kružnice ***k₁***. Označme ***¹T₁, ²T₁*** průsečíky půdorysů torzálních přímek s kružnicí ***k₁***. Tečny ***k₁*** v bodech ***T₁*** a ***²T₁*** jsou půdorysná stopa roviny řezu a půdorys její průsečnice s torzální rovinou $^2\tau$, tyto přímky jsou rovnoběžné s ***p₁***. Průsečíky ***C, X*** přímky ***p*** s elipsou ***k*** jsou dvojnásobné body řezu, protože bod ***C*** leží na dvojnásobné přímce ***²k*** plochy a ***X*** je bodem dotyku tečné roviny σ. To nám umožní speciální konstrukci tečných rovin plochy Φ. Nechť jsou dány dvě přímky ***p, p´*** plochy, takové, že ***p₂=p´₂***. Určíme tečnou rovinu dotýkající se plochy v bodě ***T*** přímky ***p***. Rovina σ prochází přímkou ***p*** a plochu protíná v elipse ***k***. Půdorysem této elipsy je kružnice ***k₁***, která se dotýká přímky ***p´₁*** v bodě ***²k₁*** a prochází bodem ***T₁*** (podle předchozího) . Tečny ke kružnici ***k₁*** rovnoběžné s ***p₁*** jsou půdorysná stopa roviny σ a hlavní přímka roviny σ ležící v rovině $^2\tau$. Tím je rovina s určena. Body dotyku těchto tečen jsou půdorysy průsečíků roviny σ s torzálními přímkami. Obráceně, je-li dána tečná rovina s konoidu procházející

přímkou ***p***, pak určíme průsečíky ***T, ^{2}T*** roviny σ s torzálními přímkami $^1\tau$,$^2\tau$ a sestrojíme kružnici ***k$_1$*** nad průměrem ***^{1}T$_1$ ^{2}T$_1$*** (prochází bodem ***^{2}k$_1$*** a dotýká se ***p´$_1$***). Průsečík***k$_1$*** a ***p$_1$*** různý od ***^{2}k$_1$*** je půdorysem bodu dotyku roviny σ.

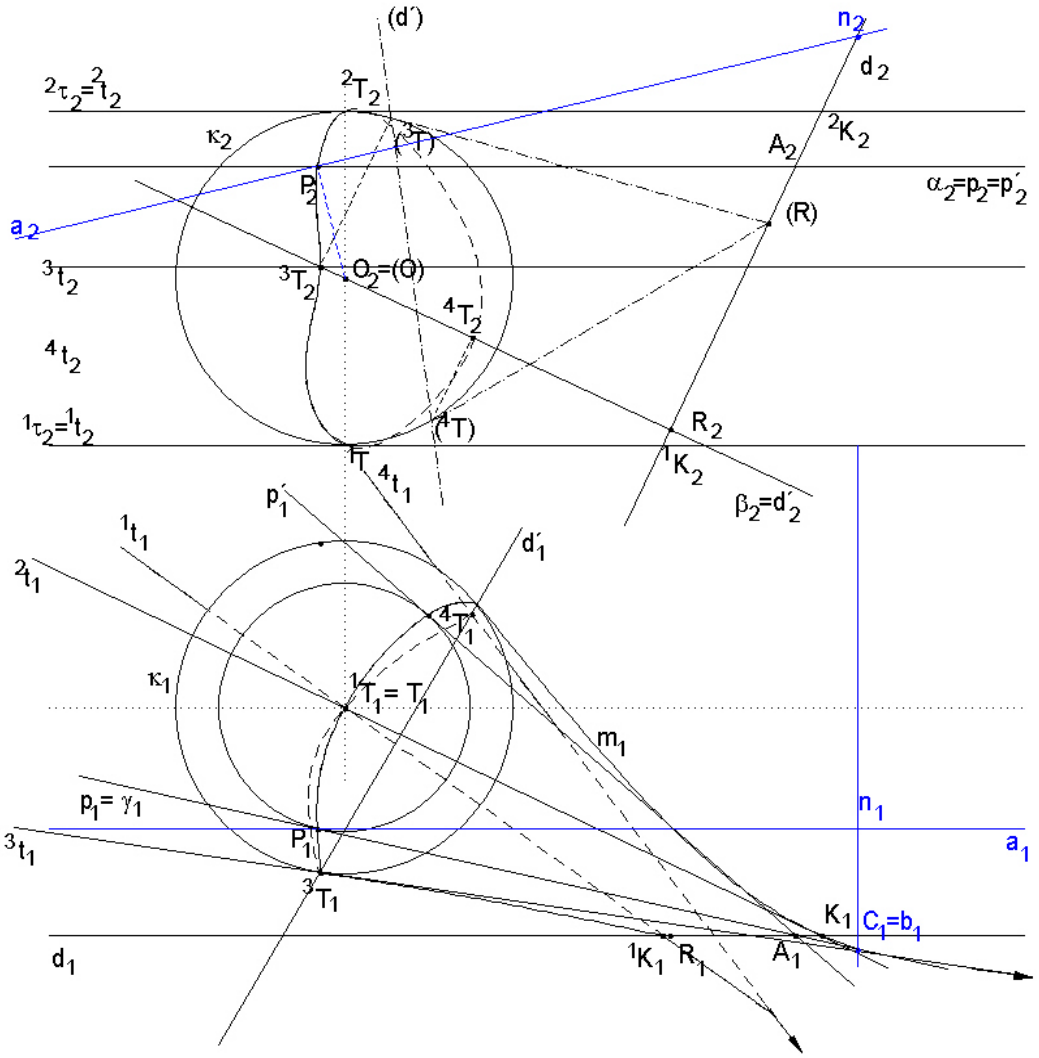


Mez vlastního stínu Plückerova konoidu je množina bodů dotyku tečných světelných rovin, tj. tečných rovin procházejících středem promítání. Mějme dáno rovnoběžné osvětlení plochy Φ. Sestrojme vržený stín ***^{2}t´*** torzální přímky ***^{2}t*** do π a označme ***^{1}D*** průsečík přímek ***^{1}t*** a ***^{2}t´*** . Pomocí zpětného paprsku vedeného bodem ***^{1}D*** sestrojme na ***^{2}t*** bod ***^{2}D*** a označme ***O*** střed úsečky ***^{1}D^{2}D***. Dá se dokázat, že kružnice ***l$_1$*** sestrojená nad průměrem ***O$_1$^{2}k$_1$*** je množina středů půdorysů řezů konoidu všemi tečnými světelnými rovinami. Toto tvrzení nám umožní sestrojit kružnici ***k$_1$*** (půdorys řezu plochy světelnou rovinou s procházející přímkou p) bez vyrýsování její stopy. Stačí sestrojit průsečík ***O´$_1$*** kolmice k ***p´$_1$*** vztyčené v bodě ***^{2}k$_1$*** s kružnicí ***l$_1$***.



Šikmý kulový konoid je zborcená plocha, tvořená přímkami, které se dotýkají řídící kulové plochy κ, protínají řídící přímku ***d*** a jsou rovnoběžné s řídící rovinou σ, která není kolmá k přímce ***d***. Řídící útvary zvolíme tak, aby se κ dotýkala π, ***d*** byla rovnoběžná s nárysnou (nemá společné body s κ) a řídící rovina byla π.

Plocha je čtvrtého stupně. Přímky plochy se sestrojují následující konstrukcí. Sestrojíme rovinu α rovnoběžnou s půdorysnou a určíme její průsečík ***A*** s přímkou ***d***. Z bodu ***A*** vedeme v rovině α tečny ***p, p´*** ke kulové ploše κ. (tj. tečny ke kružnici ***k***, ve které rovina α protíná kulovou plochu κ.) Tečné roviny $^{1}\tau,^{2}\tau$ kulové plochy κ a rovnoběžné s π jsou torzální roviny. Průsečíky ***^{1}K, ^{2}K*** torzálních rovin $^{1}\tau,^{2}\tau$ s přímkou ***d*** jsou kuspidální body a přímky ***^{1}K^{1}T, ^{2}K^{2}T*** jsou torzální přímky. (***^{1}T, ^{2}T*** jsou body dotyku torzálních rovin $^{1}\tau,^{2}\tau$ s κ). Další dvě torzální roviny se sestrojí podobně, přímkou ***d*** vedeme tečné roviny $^{3}\tau,^{4}\tau$ ke κ, kuspidální body ***^{3}K$^{\infty}$, ^{4}K$^{\infty}$*** jsou nevlastní (průsečíky s nevlastní přímkou řídící roviny), tedy torzální přímky ***^{3}t, ^{4}t*** jsou tečny κ ležící v torzálních rovinách $^{3}\tau,^{4}\tau$ a jsou rovnoběžné s π. Jejich nevlastní body jsou kuspidální body. Body dotyky ***^{3}T, ^{4}T*** torzálních rovin $^{3}\tau,^{4}\tau$ s k sestrojíme např. jako průsečíky k s přímkou ***d´***, která je polárně sdružená s ***d*** vzhledem ke κ. Body prvního obrysu se sestrojí jako body dotyku tečných rovin kolmých k π. Přímkou ***p*** plochy vedeme první promítací rovinu γ, její bod dotyku ***C*** sestrojíme užitím dotykové kvadriky Ω plochy Φ podél ***p***. Je-li ***P*** bod dotyku přímky ***p*** s κ, tečná rovina σ ke κ v bodě ***P*** obsahuje přímku ***p*** a je tedy tečnou rovinou plochy Φ v tomto bodě. Bodem ***P*** vedeme např. hlavní přímku ***a*** první osnovy roviny σ (***a_2*** je kolmá k ***O_2P_2***) přímky ***a, d*** a řídící rovina π určují dotykový hyperbolický paraboloid Ω podél ***p***. Jeho druhá řídící rovina je ν. Ploše Ω patří přímka ***n*** kolmá k ν, ***n_2*** je průsečík ***a_2*** a ***d_2***, podobně patří ploše přímka ***b*** kolmá k ***p, b_1*** je průsečík ***p_1*** a ***n_1***. Přímky ***p*** a ***b*** leží v γ, jejich průsečík ***C*** je bodem dotyku roviny γ a tedy bodem prvního skutečného obrysu ***m***. Přímka ***p_1*** se dotýká ***m_1*** v bodě ***C_1***. Rovina α rovnoběžná s π je asymptotickou rovinou kvadriky Ω, je tedy i asymptotickou rovinou plochy Φ a centrální roviny plochy Φ jsou pak kolmé k π. Prvním skutečným obrysem takto zadané plochy je strikční křivka ***m***. První zdánlivý obrys se dotýká půdorysů torzálních přímek v půdorysech kuspidálních bodů, proto jsou ***$^{3}t_1$, $^{4}t_1$*** asymptoty křivky ***m_1***.


(d´)
n2
d2
2τ2=2t2
2T2
κ2
(2T)
A2
2K2
P2
α2=p2=p´2
a2
(R)
3t2
3T2
O2=(O)
4T2
4t2
1τ2=1t2
(4T)
R2
T
4t1
1K2
β2=d´2
p´1
1t1
d´1
2t1
4T1
κ1
1T1= T1
m1
n1
p1= γ1
P1
a1
3t1
3T1
K1
C1=b1
d1
1K1
R1
A1